FONDAMENTI
PER LA TEORICA

DELLE

FUNZIONI DI VARIABILI REALI

DI

ULISSE DINI

PROFESSORE ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

PISA
TIPOGRAFIA T. NISTRI E C.
—
1878

Fino da 12 o 13 anni fà era in me sorto il dubbio che alcuni dei principii fondamentali dell'Analisi non presentassero nei loro enunciati o nelle loro dimostrazioni tutto quel rigore che è proprio della matematica. Nuovo però allora alla vita scientifica, nel trovare che niuno aveva sollevato pubblicamente tali dubbî, ne traeva il convincimento che essi fossero nella mia mente soltanto; quando da alcune memorie di Schwarz e di Heine pubblicate nel torno del 1870 e 71 ebbi a conoscere che uomini già provetti nella scienza e meritamente stimati avevano sollevato dubbî anco maggiori; e nel cerchio degli scienziati Tedeschi già miravasi a porre su basi più solide i principii dell'Algebra e dell'Analisi infinitesimale.

Le memorie allora pubblicate però, non davano quà e là che pochi cenni intorno ai dubbî indicati, e mentre in esse si faceva intendere che alcuni di questi dubbî potevano esser tolti, non si mostrava da alcuno come ciò potesse farsi. Fu allora che ansioso di conoscere qualche cosa di quello che si era fatto in questo indirizzo, tanto più che, divenuto in quel tempo Professore di

Analisi superiore nella R. Università di Pisa, i miei studî si erano rivolti più specialmente all'Analisi, scrissi in proposito al Sig. Schwarz, ed Egli con una gentilezza di cui gli rendo ora pubbliche grazie, volle comunicarmi alcune notizie intorno ai metodi che Weierstrass e altri matematici tedeschi suoi allievi seguivano nelle loro dimostrazioni.

In seguito alle notizie avute da Schwarz e alla lettura fatta dei due bellissimi lavori di Hankel sui limiti e sulle funzioni oscillanti, e di quelli di Dedekind, di Cantor, e di Heine sui numeri incommensurabili, mi decisi a prendere come soggetto di una parte delle mie lezioni universitarie dell'anno scolastico 1871-72 l'esposizione dei principii della Scienza ridotti rigorosi seguendo le traccie contenute negli indicati lavori e nelle notizie avute da Schwarz; e nell'anno successivo, deciso a pubblicare quelle lezioni, le scrissi per la stampa nella loro massima parte.

Distratto però sul finire del 1873 da cure gravissime di un genere ben differente, dovei forzatamente ritardare la indicata pubblicazione, e solo nel luglio del 1875, mentre era ancora in mezzo a mille altre occupazioni, la stampa fu incominciata per poi restare sospesa a mezzo del 1876, dopo di essermi valso della parte allora stampata, cioè dei primi 9 capitoli, per farne soggetto di alcune delle lezioni universitarie di quell'anno.

Tornato poi interamente alla vita scientifica nei primi del 1877, potei nuovamente pensare alla interrotta pubblicazione. Se non chè intanto nuovi lavori erano comparsi, fra i quali quelli di Du Bois-Reymond, di Thomae, e di Darboux, e in questi trovavansi esposti con metodi differenti alcuni dei risultati che già avevo pubblicati o preparati per pubblicarli; talchè con questo la mia pubblicazione veniva a perdere una parte non piccola del

pregio che altrimenti avrebbe potuto avere. Gli studî poi chè allora facevo per il corso di analisi infinitesimale vera e propria del quale era stato incaricato, e ove trovavo ad ogni passo un inciampo, avevano allargato d'assai le mie vedute; e da ciò avveniva che ove delle nuove ricerche di altri e delle mie proprie avessi voluto valermi, l'opera da me incominciata avrebbe dovuto dirsi ben difettosa per l'ordine che avrebbero avuto le materie in essa contenute; e si sarebbero quà e là trovate delle ripetizioni, o si sarebbero trovate esposte cose che con maggiori limitazioni io aveva già esposto in addietro.

Si aggiunge che ove avessi voluto continuare coi miei primitivi intendimenti, ponendo cioè nel libro da pubblicarsi anche le principali ricerche fatte fin ora sugli integrali multipli, sulle funzioni di due o più variabili in generale e su quelle che soddisfano alla equazione $\Delta^2=0$, sulla sviluppabilità delle funzioni in serie trigonometriche, in serie di funzioni sferiche ec., il libro sarebbe venuto a prendere una mole considerevole che non mi era più possibile di dargli, sia perchè la pubblicazione già da tanto tempo incominciata sarebbe andata ancora eccessivamente in lungo, sia perchè io volevo dedicarmi alla pubblicazione di un corso rigoroso e completo di Analisi infinitesimale di cui tanto si sente il bisogno; ed è perciò che io stetti allora un poco in forse se non fosse stato il miglior partito quello di abbandonare senz'altro la pubblicazione incominciata.

Il trovarsi però la parte pubblicata in mano di un certo numero di amici, e di molti dei giovani che furono già miei studenti, avevano creato per me degli impegni che non mi permettevano di retrocedere; ed è perciò che io decisi di continuare la pubblicazione, per quanto difettosa essa potesse venire, fissando naturalmente di

valermi delle nuove cognizioni acquistate, e fissando al tempo stesso di troncarla dopo di avere esposto le nozioni fondamentali sugli integrali definiti.

Così ho fatto, riservandomi di riprendere la pubblicazione del rimanente di questa opera a tempo più opportuno, dopo che avrò pubblicato seguendo i nuovi concetti un corso completo di Analisi infinitesimale del quale un primo abbozzo già fu autografato per le mie lezioni di quest'anno; e dopo quanto ho detto spero di trovar venia nel lettore pei varii difetti che si incontreranno nell'opera che ora consegno al giudizio del pubblico.

Dopo ciò, ecco un rapido cenno di quanto si contiene in questo libro.

Nel primo capitolo tratto dei numeri incommensurabili, valendomi molto della memoria del Dedekind e delle notizie gentilmente avute da Schwarz; e nel secondo tratto dei gruppi di numeri o di punti *(Punkt-menge)* introdotti da Cantor nella scienza. Mi fermo alquanto nel terzo sul concetto di limite, e i teoremi che ivi riporto, se non altro pel metodo con cui sono esposti, mi sembrano assai notevoli, e mentre gettano molta luce su questioni fin ora assai intricate della scienza, servono a portarvi facilmente quel rigore che in molti casi era mancato fin ora.

Esposto poi nel quarto capitolo il concetto generale di funzione di una variabile reale in un certo intervallo, passo a dare nel quinto le proprietà generali delle funzioni finite e continue, per le quali trovo opportuno valermi del teorema di Cantor sulla continuità uniforme che io espongo al §. 41, e la cui dimostrazione mi fu comunicata da Schwarz. Tratto poi nel capitolo sesto delle funzioni che chiamo infinite volte discontinue *(funzioni linearmente discontinue* di Hankel), e nei due capitoli seguenti espongo alcuni studî generali sulle serie e sulle derivate che io credo noti soltanto in parte.

Nel capitolo 9.° espongo il principio della condensazione delle singolarità dato da Hankel, riducendolo a mio credere pienamente rigoroso; e nel capitolo 10.° trovo una classe generale di funzioni analitiche abbastanza semplici che non hanno mai derivata determinata e finita, e delle quali è caso particolarissimo quella data dal Du Bois-Reymond nel vol. 79 del giornale di Borchardt. Le ultime delle funzioni che io dò in questo capitolo (§. 129) quando in esse α e x si considerino come il raggio vettore e l'angolo polare dei punti di un piano somministrano anche esempî notevoli di funzioni di due variabili α e x che sono finite e continue in tutto il piano, e che nei punti fuori del cerchio di raggio $1+\frac{3}{2}\pi$ hanno finite e continue tutte le derivate parziali rispetto alla variabile α, mentre non hanno mai determinata e finita la derivata parziale rispetto ad x. Facilmente poi si troverebbero funzioni di un numero maggiore di variabili che presentano particolarità simili.

Nel capitolo 10.° espongo alcuni studî e ricerche generali intorno alle funzioni finite e continue per ciò che ha riguardo alla esistenza delle derivate; e sono questi gli studî che avrebbero potuto essere esposti con ordine migliore insieme a quelli del Capitolo 7.°, ove fossero stati fatti dapprima, e ove la loro stampa si fosse incominciata soltanto dopo di averli compiuti. Ciò non ostante io annetto a questi risultati una certa importanza, perocchè mi convinco ogni dì più che in studî di ordine così generale sulle funzioni, indipendenti cioè anche dalla possibilità di una espressione analitica per le funzioni stesse, e per le quali si pongono sòltanto come date alcune loro proprietà generali, cioè quelle di esser sempre finite e continue nell'intervallo nel quale si studiano, la consi-

derazione delle quantità che ho chiamate rapporti incrementali, e estremi oscillatorii di questi rapporti getta molta luce, e permette di giungere a conclusioni che altrimenti sarebbe forse ben più difficile di ottenere, o che non avrebbero quel grado di generalità che per esse si trova.

Pongo in fine un lungo capitolo sugli integrali definiti, nel quale valendomi di quanto ho esposto nel capitolo precedente, giungo a dei risultati che hanno una generalità estremamente maggiore di quella che avrei dapprima creduto di potere ottenere; e per questa generalità, come per la novità di molti dei risultati medesimi o dei metodi di dimostrazione, voglio sperare che anche il capitolo stesso non sarà trovato privo di un certo interesse.

Con questi risultati poi, se ne potrebbero ottenere molti altri simili per gli integrali multipli; come in generale si potrebbero estendere al caso delle funzioni di più variabili, considerate entro campi determinati a più dimensioni finiti o infiniti, molti dei risultati ottenuti nel capitolo 4.° e nei seguenti per le funzioni di una sola variabile.

Io però non pubblico ora queste estensioni che d'altronde, seguendo i metodi esposti, non presentano grande difficoltà; e col capitolo testè indicato sugli integrali definiti pongo fine al mio lavoro che io pel primo riconosco incompleto. Sarò lieto se ciò non ostante, esso contribuirà a rendere familiari alcune osservazioni e alcuni risultati che in questi ultimi tempi hanno scosso per poi riedificare, immediatamente, su basi più solide i principii fondamentali dell'Analisi; osservazioni e risultati che, senza tema di errare, possiamo dire esser finora rimasti racchiusi soltanto in un cerchio ristretto di cultori della scienza.

Pisa, 10 Luglio 1878.

Numeri incommensurabili.

1. Prima d'intraprendere lo studio delle funzioni di variabili reali, è utile di esporre in modo preciso il concetto dei numeri irrazionali o incommensurabili e quello di limite.

Incominciando dall' occuparci dei numeri irrazionali, noi osserveremo che giunti nell' Aritmetica alla estrazione di radice, e riscontrata l' impossibilità di eseguire coi soli numeri interi e frazionarii questa operazione in un numero infinito di casi, non ci si arresta dinanzi a questa impossibilità, ma (come già venne fatto per la introduzione nella Aritmetica dei numeri frazionarii) conviene allora tornare al primitivo concetto di numero intero e fratto, onde vedere se la impossibilità incontrata anzichè essere una vera e propria impossibilità relativa a questa operazione, non provenga invece dal concetto ancora troppo limitato che si ha del numero, e se questo concetto non sia ancora suscettibile di una estensione colla quale vengano ad introdursi nell'Aritmetica dei nuovi numeri ai quali pur corrisponda qualche cosa di reale, almeno in generale, e coi quali le difficoltà incontrate nella estrazione di radice vengano a scomparire, e le altre operazioni dell' Aritmetica (convenientemente estese, ove occorra, nel loro significato) restino ancora possibili, e mantengano le loro proprietà fondamentali.

E allora, a fare vedere che il concetto di numero, coi soli numeri interi e fratti, non ha raggiunto tutta la sua generalità, ma può ancora convenientemente estendersi, la Geometria viene in ajuto della Aritmetica, poichè la Geometria ci mostra che coi soli numeri interi e fratti è impossibile di misurare infiniti pezzi di linee con una data unità di misura; e ci avverte in conseguenza che se non altro per misurare certe lunghezze è necessario estendere ancora il concetto di numero, e introdurre nuovi numeri nell' Aritmetica.

E la Geometria pure ci fà scuoprire il modo secondo il quale la introduzione di questi numeri nell'Aritmetica può farsi.

Prendiamo infatti su una retta un punto fisso O e una unità di misura, e segnamo su questa retta a destra e a sinistra di O (che consideriamo come il punto *zero)* dei punti le cui distanze da O rispetto alla unità di misura scelta siano espresse da numeri razionali (interi o fratti, positivi, o negativi). Questa divisione, per quanto grande sia il numero dei punti che si segneranno, lascierà sempre infiniti altri punti m, m', m''.... ai quali sarà possibile di avvicinarsi quanto si vuole segnando un numero sempre maggiore degli stessi punti di divisione corrispondenti a numeri razionali, ma che però non potranno mai essere raggiunti esattamente, come per es. i punti corrispondenti ad un estremo delle lunghezze uguali alla diagonale del quadrato che ha per lato *uno,* quando l' altro estremo di queste lunghezze è in un punto cui corrisponde un numero razionale. Queste distanze Om, Om',... non potranno dunque venire rappresentate con numeri razionali, ma volendo rappresentarle con numeri, sarà indispensabile di introdurre per esse dei nuovi numeri; e quando ciò venga fatto, esse come tutte le altre distanze da O saranno esprimibili con numeri (dei nuovi o degli antichi) e il campo dei numeri verrà grandemente esteso. Ora, se Om è la distanza corrispondente a uno di questi nuovi numeri, si vede che le distanze corrispondenti a tutti i numeri *razionali* che possiamo immaginare possono sempre supporsi divise in due classi, le une minori di Om e le altre maggiori di Om, e sì le une che le altre dotate della proprietà che aggiungendo successivamente in ciascuna classe, e in ordine

crescente per quelle della prima classe e decrescente per quelle della seconda, delle nuove distanze rappresentate esse pure da numeri razionali, si andrà successivamente avvicinandosi alla grandezza *Om*, restando però sempre le prime grandezze inferiori alle seconde e ad *Om* e viceversa; e quindi il numero introdotto per rappresentare questa grandezza *Om* potrà riguardarsi come un numero corrispondente a una grandezza determinata cui le grandezze delle due classi vanno sempre più avvicinandosi in modo da differirne meno di qualunque grandezza data, senza però raggiungerla mai; o anche, se vuolsi, come il numero che corrisponde alla grandezza *Om* che segna il confine fra le due classi di grandezze in cui abbiamo detto di scomporre le grandezze corrispondenti ai numeri razionali.

2. Portiamo ora nell'Aritmetica questi concetti e cerchiamo con essi di estendere il concetto di numero indipendentemente dalla Geometria, restando cioè perfettamente nell'Aritmetica. Immaginiamo perciò una decomposizione dei numeri *razionali* in due classi A_1 e A_2 tali che i numeri della prima classe siano minori di quelli della seconda e tutt'al più uno della prima sia uguale ad uno della seconda, e in modo anche che ogni numero razionale che può immaginarsi possa sempre riguardarsi come appartenente all'una o all'altra di queste due classi (*). Allora potrà avvenire che, introducendo nelle due classi sempre nuovi numeri razionali in ordine crescente nella prima e decrescente nella seconda, coi numeri delle due classi si vada continuamente avvicinandosi ad un certo numero razionale a, e si finisca per raggiungerlo, come potrà avvenire invece che estendendo quanto si vuole col processo indicato il campo dei numeri razionali delle due classi, non si riesca a trovare un numero razionale che segni il confine fra i numeri delle due classi, nonostante che i numeri di queste classi finiscano per essere vicini gli uni agli altri tanto quanto si vuole.

(*) Tale sarebbe p. es: quella scomposizione dei numeri razionali in due classi per la quale nella prima classe vengono a trovarsi i numeri razionali il cui quadrato è minore di un dato numero razionale d e nella seconda quelli il cui quadrato è maggiore di d.

Ora in questo secondo caso, quando i numeri commensurabili si riferiscano a grandezze per le quali la divisibilità all' infinito è ammissibile (come per le distanze contate su una retta) le due classi di numeri A_1, A_2 almeno in un immenso numero di casi (come si è già visto sopra per alcune porzioni della retta), godono della proprietà che le grandezze ad essi numeri corrispondenti considerate successivamente in ordine crescente nella prima classe e decrescente nella seconda si avvicinano indefinitamente fra loro e a una grandezza unica e determinata la cui *esistenza* è conosciuta a *priori,* ma che però non può essere mai raggiunta colla sola considerazione delle grandezze corrispondenti ai numeri razionali delle due classi e che segna il confine fra le grandezze di queste classi; quindi se anche a questa grandezza verrà assegnato un numero corrispondente, questo numero non sarà razionale ma ad esso corrisponderà qualche cosa di reale; e si potrà dire perciò allora che considerando successivamente e nell'ordine più volte indicato i numeri delle due classi A_1, A_2 almeno in un immenso numero di casi si dà luogo a un numero il quale sebbene non sia razionale è tale però che ad esso (come ai numeri razionali) corrisponde effettivamente qualche cosa di reale, poichè ad esso corrisponde una grandezza che ha una vera e propria esistenza e che sebbene non possa mai raggiungersi passando per le sole grandezze corrispondenti ai numeri razionali, è tale però che ad essa ci si può avvicinare quanto si vuole considerando nel senso indicato le due serie di grandezze precedenti.

Consideriamo ora una qualunque delle precedenti scomposizioni dei numeri razionali in due classi A_1, A_2, e immaginiamo aggiunti a ciascuna di queste classi sempre nuovi numeri razionali in ordine crescente per la prima e decrescente per la seconda. Se avverrà che con questo processo non si giunga mai a trovare un numero razionale che segni il confine fra i numeri delle due classi, e contrariamente a ciò che si supponeva poc' anzi, non sarà neppure nota a *priori* una grandezza determinata cui ci si vada continuamente avvicinando collo stesso processo, allora, siccome ai numeri razionali delle due classi che si aggiungono successivamente possono sempre immaginarsi come corrispondenti

delle grandezze determinate parti di un altra grandezza per la quale la divisibilità all'infinito è ammissibile, e queste grandezze vanno ognor più avvicinandosi in modo che quelle della prima classe finiscono per differire da quelle della seconda meno di qualunque grandezza data e il processo stesso può continuare ad applicarsi indefinitamente, non sarà contradittorio il pensare come esistente anche in questo caso una grandezza da riguardarsi come *determinata* dallo stesso processo; quindi potremo evidentemente estendere ancora il concetto di numero, sia immaginando come esistente sempre una tale grandezza e assegnando ad essa un numero corrispondente, sia attribuendo in ogni caso alla fatta scomposizione dei numeri razionali un segno convenzionale da riguardarsi come un nuovo numero al quale siamo condotti dalla ripetuta applicazione del processo precedente (della successiva introduzione cioè di numeri razionali nelle due classi A_1 e A_2), in modo che ad ognuna di tali scomposizioni venga sempre a corrispondere un numero che sia o il numero razionale che eseguisce la scomposizione stessa, o un numero (o segno) che tenga luogo di quello razionale mancante e che serva in ogni caso a caratterizzare tale scomposizione. E poichè, anche indipendentemente dal nuovo concetto che abbiamo indicato per la determinazione di una grandezza col processo dato sopra, e indipendentemente dalla rappresentazione che questo concetto ci somministra così in ogni caso pei nuovi numeri, si ha già come sopra si è detto un immenso numero di casi nei quali a tali numeri viene a corrispondere una vera e propria oggettività, bene s'intende quanto possa essere utile l'introdurli effettivamente nell'Aritmetica, e considerarli sempre come esistenti; e così, *introducendoli ora effettivamente,* oltre ai numeri razionali avremo nell'Aritmetica dei nuovi numeri che sono quelli che diconsi incommensurabili o irrazionali. E questi numeri che anche quando si ritenga il primitivo concetto di grandezza, hanno già una rappresentazione reale almeno in un immenso numero di casi, acquisteranno sempre una tale rappresentazione quando per le grandezze per le quali la divisibilità all'infinito è ammissibile si ammetta il concetto generale di determinazione di grandezza coi processi precedenti; e indipenden-

temente anche da questi concetti, e se non altro per semplicità di locuzione, gli stessi numeri potranno, se vuolsi, essere considerati in modo generale come simboli o segni rappresentativi delle scomposizioni corrispondenti dei numeri razionali nelle due classi di numeri A_1, A_2 tali che i numeri della prima classe siano minori di quelli della seconda, e tutt' al più uno della prima sia uguale ad uno della seconda.

3. E così in particolare quando, come avremo spesso occasione di fare, si riferiscano i numeri alle distanze contate su una linea retta nel modo detto sopra, ad ogni distanza, o ad ogni punto su questa retta corrisponderà, secondo i casi, un numero razionale o un numero irrazionale; e viceversa ad ognuno dei numeri irrazionali nuovamente introdotti potrà considerarsi come corrispondente una distanza o un punto sulla retta quando rispetto alla retta si ammetta come postulato o come assioma che se si dividono i punti di essa in due classi tali che ogni punto della prima classe si trovi a sinistra di ogni punto della seconda esiste uno ed un solo punto della retta che apporta questa divisione, questa separazione definita in due classi (Dedekind), ciò che corrisponde in sostanza ad applicare al caso della retta il concetto generale di determinazione di grandezza data sopra. E con questo postulato i numeri razionali e irrazionali, o, come si dice, i numeri reali, verranno ad acquistare tutti una rappresentazione sulla linea retta; e, volendo, invece di parlare di numeri, potremo sempre parlare di punti corrispondenti su una retta.

4. Presi poi due numeri reali (razionali o irrazionali) α e β, e immaginate le due corrispondenti scomposizioni (A_1, A_2), (B_1, B_2) dei numeri razionali, se avverrà che qualunque numero che può immaginarsi della classe A_1 (o A_2) appartenga alla classe B_1 (o B_2) e viceversa, le due scomposizioni saranno identiche e i numeri α e β saranno uguali; e uguali pure dovranno riguardarsi tali numeri quando avvenga che uno ed un solo numero a della classe A_1 appartenga anche alla classe B_2, giacchè allora questo numero a sarà evidentemente il minimo della classe B_2 e il massimo della classe A_1, e quindi le due scomposizioni corrisponderanno allo stesso numero razionale a e sarà $\alpha=\beta=a$. E se invece si troverà

che due numeri a e b della classe A_1 appartengono alla classe B_2, allora anche tutti i numeri razionali che possono immaginarsi fra a e b apparterranno ad un tempo alla classe A_1 e alla classe B_2, e le due scomposizioni (A_1, A_2), (B_1, B_2) come i loro numeri corrispondenti α e β saranno differenti; e, seguendo l'analogia con ciò che si dice pei numeri razionali, nel caso di cui si tratta si dirà che α è maggiore di β; mentre se si troverà che nessuno dei numeri di A_1 appartiene a B_2 e due almeno di B_1 appartengono ad A_2 si dirà che α è minore di β; e così se si avrà $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma$, si avrà altresì $\alpha > \gamma$, e β si dirà compreso fra α e γ. E se avverrà che i numeri di A_1 e quelli di B_1 considerati in ordine crescente finiscano per differire sempre gli uni dagli altri in valore assoluto meno di un numero positivo d, si dirà che α differisce da β meno di d in valore assoluto.

5. È ora da osservare che ogni numero reale α segnerà una scomposizione del sistema dei numeri reali in due classi (A'_1, A'_2) tali che i numeri della prima classe saranno minori di ogni numero della seconda e viceversa (α escluso), e α potra considerarsi come il massimo fra quelli della prima classe e il minimo fra quelli della seconda. Viceversa ad ogni scomposizione (A'_1, A'_2) dei numeri reali in due classi tali che i numeri della prima siano minori di quelli della seconda e viceversa uno al più escluso, corrisponderà sempre un numero razionale o irrazionale che effettuerà la scomposizione, e che sarà cioè il massimo fra quelli della prima classe e il minimo fra quelli della seconda. È chiaro infatti che la scomposizione (A'_1, A'_2) ci dà anche una scomposizione (A_1, A_2) dei numeri razionali tale che i numeri di A_1 sono tutti contenuti in A'_1, e quelli di A_2 in A'_2 e viceversa, e alla quale corrisponderà un numero razionale o irrazionale α; e questo numero sarà al tempo stesso quello che effettua la scomposizione (A'_1, A'_2) poichè se non fosse il massimo della prima e il minimo della seconda, ma appartenesse p: es: ad A'_1 e in A'_1 si trovassero anche numeri maggiori di α, allora in A_1 vi sarebbero evidentemente numeri razionali maggiori di α, e questo è contro l'ipotesi.

6. Più generalmente supponiamo che si abbiano due classi di numeri A''_1, A''_2 razionali o irrazionali che non contengano tutti

i numeri reali, ma che siano tali che i numeri della classe A''_1 vadano continuamente crescendo o restino gli stessi e quelli della classe A''_2 vadano invece decrescendo o restino gli stessi, e inoltre quelli della classe A''_1 siano minori di quelli della classe A''_2, e considerando un numero sempre più grande di numeri della prima classe in ordine crescente o fissi e di numeri della seconda in ordine decrescente o fissi si trovi che i numeri delle due classi vanno avvicinandosi quanto si vuole gli uni agli altri; allora sarà facile vedere che esisterà sempre un numero determinato α' razionale o irrazionale che godrà della proprietà che nessuno dei numeri della prima classe sarà maggiore di α', e nessuno di quelli della seconda sarà minore di α', e potrà perciò essere considerato come limite superiore dei numeri della prima classe e limite inferiore di quelli della seconda.

Se consideriamo infatti successivamente i numeri della classe A''_1, e così quelli della classe A''_2, e immaginiamo successivamente fra due numeri qualunque dalla stessa classe aggiunti i numeri reali mancanti, si giungerà a formare una scomposizione (A'_1, A'_2) di questi numeri in due classi A'_1, A'_2 tali che i numeri della prima classe siano minori di quelli della seconda (uno soltanto escluso); e a questa scomposizione corrisponderà un numero razionale o irrazionale α' che la effettuerà e che sarà evidentemente il numero cercato.

Questo numero α' potrà dirsi il numero corrispondente alla data scomposizione (A''_1, A''_2); e potrà dirsi anche evidentemente che a due di queste scomposizioni (A''_1, A''_2) (B''_1, B''_2) corrisponderà uno stesso numero quando i numeri della classe A''_1 e quelli della classe B_1'' considerati successivamente (cioè in ordine crescente o fissi), e così quelli delle classi A''_2 e B''_2 considerati pure successivamente (cioè in ordine decrescente o fissi) finiscano per differire gli uni dagli altri meno di qualunque quantità data.

Notiamo poi che per la determinazione di un tal numero α' basterà anche considerare una sola delle due classi di numeri A''_1, A''_2 p: es: la A''_2, poichè quando si voglia potremo sempre immaginare formata l' altra con una serie qualunque crescente o fissa di numeri nessun dei quali sia contenuto nella A_2'', e tali

inoltre che mantenendosi sempre inferiori di quelli di quest' ultima classe finiscano per avvicinarsi a questi tanto quanto si vuole.

7. Queste osservazioni somministrano il modo di estendere ai numeri irrazionali i significati e le proprietà delle varie operazioni aritmetiche.

Consideriamo perciò due numeri razionali o irrazionali α e β, e indichiamo con (A_1, A_2) e (B_1, B_2) le scomposizioni dei numeri razionali corrispondenti, e con $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ e $a'_1, a'_2 \ldots a'_n \ldots$ i numeri razionali delle classi A_1, A_2 scritti in ordine crescente e decrescente respettivamente, e con $b_1, b_2 \ldots b_n, \ldots$ e b'_1 $b'_2, \ldots b'_n \ldots$ i numeri razionali delle classi B_1, e B_2 presi pure in ordine crescente e decrescente respettivamente.

Intendiamo che se a è un numero razionale, il numero $a \pm \beta$ sia sempre (come quando β è razionale) il numero che corrisponde alla scomposizione dei numeri razionali in due classi A'_1 e A'_2 l' una delle quali contiene i numeri:

$$a \pm b_1, \; a \pm b_2, \ldots \; a \pm b_n, \ldots$$

e l' altra contiene i numeri:

$$a \pm b'_1, \; a \pm b'_2, \ldots \; a \pm b'_n, \ldots ;$$

e intendiamo anche che il numero $\pm\beta + a$ sia quello corrispondente alla scomposizione dei numeri razionali nelle due classi di numeri:

$$A'_1 = (\pm b_1 + a, \; \pm b_2 + a, \ldots \pm b_n + a, \ldots),$$
$$A'_2 = (\pm b'_1 + a, \; \pm b'_2 + a, \ldots \pm b'_n + a, \ldots);$$

si avrà allora $a \pm \beta = \pm\beta + a$, e si vedrà subito che coi numeri dati potranno formarsi le due classi di numeri:

$$A''_1 = (\alpha \pm b_1, \alpha \pm b_2, \ldots \alpha \pm b_n, \ldots), \; A''_2 = (\alpha \pm b'_1, \alpha \pm b'_2, \ldots \alpha \pm b'_n, \ldots);$$

e così avremo una scomposizione (A''_1, A''_2) dei numeri reali simile a quelle considerate nel paragrafo precedente alla quale corrisponderà un numero razionale o irrazionale γ; e questo numero γ si chiamerà somma o differenza dei due α e β, e si scriverà $\gamma = \alpha \pm \beta = \pm\beta + \alpha$.

Con questa definizione poi le due classi di numeri:

$$A'''_1=(\pm\beta+a_1,\ \pm\beta+a_2,\dots\ \pm\beta+a_n,\dots),$$
$$A'''_2=(\pm\beta+a'_1\ \pm\beta+a'_2,\dots,\pm\beta+a'_n,\dots)$$

daranno il numero $\pm\beta+a$, e per le osservazioni fatte verso la fine del paragrafo precedente si vede subito che $\pm\beta+\alpha = \alpha\pm\beta$.

Similmente si estenderanno ai nuovi numeri le altre operazioni aritmetiche; e con ciò tutte queste operazioni, non esclusa la estrazione di radice pei numeri razionali e irrazionali positivi, verranno sempre possibili; e i noti teoremi sulle varie operazioni e sulle eguaglianze o diseguaglianze pei numeri reali verranno anche ad estendersi ai numeri irrazionali.

8. Infine osserveremo che, siccome ai numeri irrazionali ci si può sempre, come già si è detto, avvicinare quanto si vuole coi numeri commensurabili maggiori e minori di essi (in modo cioè da differirne meno di qualunque numero dato), dopo che sia stato introdotto nell' Aritmetica il concetto di limite, gli stessi numeri potranno essere riguardati anche come i limiti dei numeri commensurabili maggiori e minori di essi, e i risultati delle operazioni aritmetiche su questi numeri potranno riguardarsi come limiti dei risultati delle operazioni stesse eseguite su numeri razionali.

9. Le classi di numeri (A''_1, A''_2) come quelle considerate nel §. 6 e alle quali corrisponde sempre un numero determinato α' potranno essere state ottenute con una legge qualunque; e siccome, se invece di esse se ne considereranno altre simili (B''_1, B''_1) formate con altre leggi, ma per le quali riescano soddisfatte le condizioni dette in fine del § 6, il numero corrispondente sarà ancora lo stesso, si vede chiaramente che la legge da seguirsi nel formare queste classi di numeri, dalla considerazione delle quali risulta poi determinato un certo numero speciale, comporterà sempre una grande arbitrarietà. Ora è da osservare che quando si vogliano costruire effettivamente due di tali classi *determinate* di numeri, collo scopo principalmente di dimostrare l' esistenza di un numero *determinato,* che resulta poi il numero corrispondente alla scomposizione formata da tali classi di numeri, e

trovarlo anche effettivamente, si segue spesso un processo che dicesi *della divisione successiva dell' intervallo* in $2, 2^2, 2^3,\ldots 2^n\ldots$ *parti uguali,* e che costituisce in sostanza un metodo di passaggio al limite conosciuto già da Euclide; e noi crediamo perciò conveniente di fare conoscere subito questo processo, servendocene per la costruzione effettiva di tali classi determinate di numeri, e per la dimostrazione di un teorema generale.

Supponiamo perciò che i numeri che si presentano in un dato problema soddisfino a certe condizioni che sono di due classi A e B tali che se un dato numero soddisfa a tutte quelle di una stessa classe esso non può soddisfare al tempo stesso anche a tutte quelle dell' altra; e supponiamo inoltre che fra i numeri che cadono fra due numeri finiti α e β, o (servendosi di parole tratte dalla Geometria) fra i numeri di un dato intervallo finito (α,β) (gli estremi α e β inclusi o nò) non possa esistere, *tutt'al più,* che un solo numero che non soddisfi completamente nè alle condizioni della classe A, nè a quelle della classe B; e che del resto se uno degli stessi numeri soddisfa alle condizioni A e non è l' estremo inferiore dell' intervallo (α,β) che si considera, ogni numero minore di esso e contenuto nello stesso intervallo (l'estremo inferiore al più escluso) vi soddisfi pure, e se uno degli stessi numeri soddisfa alle condizioni B e non è l' estremo superiore dell' intervallo, ogni numero maggiore e situato nello stesso intervallo (l' estremo superiore al più escluso) vi soddisfi pure. Sarà facile allora, col processo della divisione successiva dell' intervallo (α,β) in $2, 2^2, 2^3,\ldots. 2^n\ldots$ parti uguali, di giungere a costruire due classi determinate di numeri l' una crescente o fissa e l' altra decrescente o fissa simili del tutto a quelle del §. 6, e tali che, escluso tutt'al più uno dei numeri che in esse compariscono, i numeri della prima classe soddisfaranno alle condizioni A, e quelli della seconda alle condizioni B; e queste classi daranno come al §. 6 una scomposizione di numeri alla quale corrisponderà sempre un numero determinato λ che cadrà fra α e β (α e β inclus.), e che godrà della proprietà che ogni numero minore di λ che cade nello stesso intervallo soddisfa alle condizioni A, mentre ogni numero maggiore di λ contenuto nello stesso intervallo soddisfa

alle condizioni B; talchè con ciò si verrà anche a dimostrare l' esistenza di un tal numero λ, e si darà anche il processo che serve a determinarlo effettivamente.

Si osservi perciò dapprima che due di tali numeri λ evidentemente non possono esistere, e quando si giungesse in qualche modo a trovare che un determinato numero μ diverso dagli estremi α e β non soddisfa nè a tutte le condizioni A, nè a tutte le condizioni B, si potrebbe dire senz' altro che esso è il numero cercato λ, perchè se ciò non fosse, e esistesse nell'intervallo stesso (α, β) un numero $\nu > \mu$ diverso dall'estremo superiore che soddisfacesse alle condizioni A, o un numero $\nu < \mu$ diverso dall'estremo inferiore e che soddisfacesse alle condizioni B, anche μ dovrebbe soddisfare a tutte le condizioni A o a tutte le condizioni B.

Si supponga ora $\alpha < \beta$, e si divida l'intervallo (α, β) nei due intervalli uguali $\left(\alpha, \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$, $\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}, \beta\right)$. Se avverrà che il numero $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$ non soddisfi nè a tutte le condizioni A nè a tutte le condizioni B, esso sarà il numero λ cercato e sarà inutile procedere più oltre. Se poi questo numero $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$ soddisfarà a tutte le condizioni B, ogni numero del secondo intervallo (β al più escluso) vi soddisfarà pure, e noi allora non ci occuperemo più del secondo intervallo ma del primo; mentre se $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$ soddisfarà a tutte le condizioni A, ogni numero del primo intervallo (α al più escluso) vi soddisfarà pure, e noi non ci occuperemo più del primo ma del secondo; e quindi indicando con α_1 un numero uguale a zero quando $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$ soddisfa alle condizioni B, e uguale a uno quando soddisfa alle condizioni A, e anche quando non soddisfa completamente nè a tutte le condizioni A nè a tutte le condizioni B (per comprendere anche questo caso, quantunque sia superfluo), e ponendo poi $\beta-\alpha=\gamma$ e $x_1=\alpha+\frac{\gamma}{2}\alpha_1$, l'intervallo di cui ci occuperemo sarà quello da x_1 a $x_1+\frac{\gamma}{2}$, e questo godrà della proprietà che ogni numero situato fuori di esso e che cade nell'intervallo (α, β) (α e β

al più esclusi) soddisfarà alle condizioni A se esso è minore di x_1, e alle condizioni B se esso è maggiore di $x_1+\frac{\gamma}{2}$.

Operando ora su questo intervallo $\left(x_1, x_1+\frac{\gamma}{2}\right)$ come si è operato sul primo, e ponendo $x_2=x_1+\frac{\gamma}{2^2}\alpha_2$, ove α_2 è un numero eguale a zero o a uno che si determinerà come precedentemente, formeremo l'intervallo $\left(x_2, x_2+\frac{\gamma}{2^2}\right)$ che sarà tutto contenuto negl' intervalli precedenti e che godrà della proprietà che ogni numero situato fuori di esso e che cade fra α e β (α e β al più esclusi) soddisfarà alle condizioni A se sarà minore di x_2, e alle condizioni B se sarà maggiore di $x_2+\frac{\gamma}{2^2}$.

Così continuando, col porre successivamente $x_3=x_2+\frac{\gamma}{2^3}\alpha_3$, $x_4=x_3+\frac{\gamma}{2^4}\alpha_4, \ldots x_n=x_{n-1}+\frac{\gamma}{2^n}\alpha_n$, ove le $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$ sono numeri uguali a zero o a uno che si determinano successivamente colla solita legge, dopo n di queste operazioni successive si giungerà all' intervallo $\left(x_n, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ che sarà tutto contenuto negli intervalli precedenti e che godrà ancora della proprietà che ogni numero situato fuori di esso e che cade fra α e β (α e β al più esclusi) soddisfarà alle condizioni A se sarà minore di x_n, e alle condizioni B se sarà maggiore di $x_n+\frac{\gamma}{2^n}$; e col crescere indefinito di n gli estremi inferiori $(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots)$ e gli estremi superiori $(x_1+\frac{\gamma}{2}, x_1+\frac{\gamma}{2^2}, \ldots x_n+\frac{\gamma}{2^n}, \ldots)$ di questi intervalli successivi costituiranno appunto le due classi *determinate* di numeri simili a quelle A_1'', A''_2 del § 6 che noi cercavamo; e queste due classi di numeri daranno una scomposizione alla quale corrisponderà un numero *determinato* compreso in tutti gli intervalli successivi

(α, β), $\left(x_1, x_1+\frac{\gamma}{2}\right)$ $\left(x_2, x_2+\frac{\gamma}{2^2}\right)$ .... (gli estremi inclusivi), e questo numero λ godrà appunto delle proprietà dette sopra.

Preso infatti un numero qualunque μ che cada nell'intervallo (α, β) (gli estremi α e β al più esclusi) e che sia differente da λ si potrà sempre determinare un numero n pel quale si abbia in valore assoluto $\lambda-\mu > \frac{\gamma}{2^n}$, e perciò il numero μ escirà dall'intervallo $\left(x_n, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ nel quale è pure contenuto il λ, e quindi soddisfarà alle condizioni A se sarà minore di λ e alle condizioni B se sarà maggiore di λ, cioè avrà appunto le proprietà dette sopra.

Notiamo poi che invece di parlare di due sistemi di condizioni distinte A e B e di numeri che soddisfano alle une o alle altre respettivamente, potremmo parlare di un solo sistema di condizioni e di numeri che *soddisfano* respettivamente *o non soddisfano* a queste condizioni ec....; e potremmo limitarci a costruire una sola serie di numeri sempre crescente o fissa, o sempre decrescente o fissa, la quale determinerebbe ancora (§. 6) un numero λ le cui proprietà sarebbero analoghe a quelle del numero λ del caso precedente.

Gruppi di numeri o di punti; loro limite superiore e inferiore.

10. Dopo di avere parlato dei numeri incommensurabili, noi crediamo utile di esporre le seguenti considerazioni sui gruppi di numeri.

Siano dati alcuni numeri reali $y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ definiti da certe leggi o da certe condizioni in forza delle quali essi possono essere successivamente determinati; ma queste leggi, o queste condizioni siano tutt' affatto qualunque, e il numero dei valori che ci daranno per le $y_1, y_2 \ldots y_n \ldots$ sia finito o infinito, o in altri termini lo stesso numero finisca per arrestarsi, o invece non si arresti mai per modo cioè che qualunque sia il numero dei numeri y che a un certo punto saranno stati determinati, possano

sempre, quando si voglia, determinarsene ancora dei nuovi. Diremo che questi numeri costituiscono un *gruppo di numeri;* e quando come faremo spesso, li immagineremo rappresentati su una linea retta, diremo che i punti corrispondenti costituiscono *un gruppo di punti.* E così in particolare le classi di numeri considerate nei paragrafi precedenti costituiranno dei gruppi speciali di numeri; e i punti agli stessi numeri corrispondenti costituiranno gruppi di punti.

11. Pel caso poi che si usi, come faremo il più spesso, quest' ultima denominazione, torna utile che noi diciamo fin d'ora che chiameremo *intorno di un punto* x preso in un intervallo finito (α, β) (gli estremi α e β inclusi o nò) ogni intervallo, anche arbitrariamente piccolo ma di ampiezza sempre differente da zero, che goda della proprietà di essere tutto contenuto nell'intervallo dato e di avere il punto x nel suo *interno* quando questo punto è interno all'intervallo dato stesso, e averlo soltanto ad un estremo quando esso è un estremo dell' intervallo dato; e così sarà un intorno di un punto x *interno* all' intervallo dato (α, β) ogni intervallo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon')$, ove ε e ε' sono differenti da zero e positivi, che sia tutto contenuto nell' intervallo dato stesso; mentre se x è un estremo α o β, e si ha p: es: $\alpha<\beta$, sarà suo intorno ogni intervallo $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$, $(\beta-\varepsilon, \beta)$ ove ε è positivo, che sia tutto contenuto in quello dato. E distingueremo talvolta separatamente la parte di un intorno *a destra* di x e la parte dell'intorno *a sinistra,* intendendo con queste denominazioni le parti dell' intorno di x che sono respettivamente a destra e a sinistra di esso (il punto x incluso) e allora se x sarà interno all' intervallo dato avremo sempre una parte di intorno a destra e una parte di intorno a sinistra, mentre se x sarà un estremo α o β avremo da considerare unaparte soltanto dell' intorno. E si intende che si potrà parlare di *intorni di un punto* anche per intervalli di ampiezza infinita; e invece di parlare di *intorni* di punti potremo anche parlare di *intorni di numeri,* ma torna più chiaro e più comodo di riferirsi a punti.

12. Ciò posto, prendiamo a considerare un gruppo di punti (o di numeri) $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ il cui numero sia infinito, e che siano tutti contenuti in un intervallo finito (α, β) (gli estremi α e β

inclusi o nò), e indichiamolo con G. Diremo *punti-limiti* di questo gruppo quei punti x dotati della proprietà che in ogni loro intorno anche arbitrariamente piccolo, cadono sempre infiniti punti y; e poichè, col processo della successiva divisione dell'intervallo (α, β) in 2, 2^2, 2^3... 2^4.... parti uguali (§. 9) (osservando che dei due intervalli che con esso successivamente si ottengono uno almeno deve sempre contenere infiniti punti del gruppo, e considerando successivamente l' intervallo nel quale questo avviene, o uno qualunque dei due p: es: il primo quando in ambedue cadono infiniti punti y) si giunge sempre a costruire tali punti limiti x, si potrà dire senz' altro che *qualunque sia il gruppo di punti* G *che si considera, purchè contenga un numero infinito di punti, esisterà sempre almeno un punto-limite che potrà essere o nò uno dei punti del gruppo;* e per un gruppo potranno anche esistere infiniti punti-limiti, perchè potrà avvenire che fra gli intervalli che si lasciano da parte successivamente nel processo di dimostrazione indicato, ve ne sia un numero infinito nel quale cadono ancora infiniti punti y.

Ora questi punti-limiti del gruppo G costituiranno un nuovo gruppo di punti contenuti essi pure nell' intervallo dato (α, β), ma che però potrà avere soltanto un numero finito di punti e anche un solo; e noi, in quanto risulta da G, lo diremo con *Cantor il primo gruppo derivato* di G e lo indicheremo con G'; e ora se questo gruppo G' sarà anch'esso composto di un numero infinito di punti, colla ripetizione del processo precedente potremo ottenere da esso un nuovo gruppo che si indicherà con G'' e si dirà il *secondo gruppo derivato* di G; e così in generale quando si possa ripetere ν volte di seguito lo stesso processo, giungeremo ad un gruppo che si indicherà con $G^{(\nu)}$ e si dirà il ν° *gruppo derivato* di G.

E poichè potrà avvenire che formando successivamente i gruppi derivati di G si giunga a un gruppo derivato $G^{(\nu)}$ che sia composto soltanto di un numero finito di punti e che quindi non dia più luogo ad altri gruppi derivati, come potrà avvenire invece che, spingendo oltre quanto si vuole lo stesso processo, non si giunga mai a un gruppo derivato composto di un numero finito di punti soltanto, noi potremo dividere in due specie i gruppi

(finiti o infiniti) di punti che cadono tutti in un intervallo finito, dicendo *gruppi di prima specie* quelli che hanno soltanto un numero finito di gruppi derivati o anche nessuno (il qual ultimo caso però avviene soltanto quando sono composti di un numero finito di punti), e dicendo invece *gruppi di seconda specie* quelli che hanno un numero infinito di gruppi derivati. E fra i gruppi di prima specie potremo dire gruppi di prima specie e di ordine zero o più semplicemente (senza ricordare la specie il che ora si rende inutile) *gruppi di ordine zero,* quelli che sono composti di un numero finito di punti e che quindi non hanno gruppi derivati; gruppi di *ordine primo* quelli che hanno un sol gruppo derivato; e in generale *gruppi di ordine* ν° quelli che hanno soltanto ν gruppi derivati; e così se G sarà un gruppo di ordine ν, i gruppi G', G'', . . . $G^{(\nu)}$ saranno degli ordini $(\nu-1)$, $(\nu-2)$. . . e zero respettivamente.

Così p: es: il gruppo di punti $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, ..)$ sarà di prima specie e di prim'ordine perchè ha soltanto un gruppo derivato che è quello composto dei due punti 0 e $\frac{1}{2}$; e il gruppo $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots\ldots)$ sarà di second'ordine perchè ha un primo gruppo derivato $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots)$ e un secondo gruppo derivato che si riduce al punto zero. E invece il gruppo G dei numeri razionali fra zero e 1 sarà di seconda specie, perchè il suo primo gruppo derivato G' sarà composto di tutti i numeri (razionali e irrazionali) fra 0 e 1, e i gruppi derivati seguenti saranno sempre uguali a G'.

13. Osserviamo ora che i punti che comporranno i gruppi derivati 2.° 3.° 4.°. . . , se questi gruppi esistono, apparterranno tutti *effettivamente* al primo gruppo derivato; giacchè se un punto x che appartiene al gruppo derivato $G^{(m)}$, essendo $m \geq 2$, non appartenesse anche a G', esisterebbe un intorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon')$ di questo punto nel quale cadrebbe soltanto un numero finito di punti di G, o non ve ne cadrebbe alcuno, e quindi nessun punto *interno* di questo intorno apparterrebbe a G', e in conseguenza neppure a G'', G''', . . $G^{(m)}$, ciò che è contro l'ipotesi.

Ne segue che, dopo ottenuto il primo gruppo derivato G', formando i gruppi derivati seguenti quando esistono, non si

otterranno punti nuovi; e quindi in particolare si può dire che *se un gruppo di punti di seconda specie è tale che un suo gruppo derivato contenga tutti i punti di una porzione* (a, b) *dell'intervallo dato, anche il suo primo gruppo derivato conterrà tutti questi punti.*

14. Facciamo ora osservare che i gruppi di punti di prima specie, anche quando non sono di ordine zero, in qualunque porzione (a, b) dell'intervallo (α, β) in cui sono contenuti godranno della proprietà che togliendo dalla stessa porzione, con intervalli arbitrariamente piccoli (ma di ampiezza differente da zero), gli intorni di un numero finito di punti, negli intervalli restanti non cadranno più punti del gruppo. Supposto infatti che il gruppo G che si considera sia di ordine ν^o, nell'intervallo (a, b) (a e b inclus.) non cadrà nessun punto del ν^o gruppo derivato $G^{(\nu)}$, o ve ne cadrà soltanto un numero finito, e formando nello stesso intervallo per ognuno di questi punti (se ve ne sono) degli intorni arbitrariamente piccoli e togliendoli da (a, b), otterremo un numero finito di altri intervalli (a_1, b_1), (a_2, b_2),..., in ciascun dei quali non cadrà nessun punto del gruppo di $G^{(\nu-1)}$, o ve ne cadrà soltanto un numero finito, perchè altrimenti negli stessi intervalli dovrebbero cadere anche punti di $G^{(\nu)}$. Togliendo ora in modo simile dagli intervalli (a_1, b_1), (a_2, b_2)... i punti di $G^{(\nu-1)}$, se ve ne sono, negli intervalli restanti, che saranno pure in numero finito, non avremo più che un numero finito di punti di $G^{(\nu-2)}$, o anche nessuno; e così continuando si vede chiaramente che, dopo di avere tolti successivamente dai varii intervalli che si ottengono gli intorni sufficientemente piccoli dei punti di $G^{(\nu)}$, $G^{(\nu-1)}$, $G^{(\nu-2)}$,... G', G che in essi cadono, e che evidentemente saranno in numero finito, resteranno degli intervalli nei quali non avremo più punti del gruppo dato.

È però da notare che se il gruppo non è di ordine zero il numero dei punti da togliersi così successivamente con intorni sufficientemente piccoli, sebbene sia sempre finito, andrà crescendo indefinitamente coll'impiccolire degli intorni che si toglieranno. Ed è pure da notare che pel teorema dimostrato possiamo anche dire che *pei gruppi di prima specie in ogni porzione dell'intervallo* (α, β) *esistono sempre alcuni intervalli nei quali non cadono punti*

del gruppo; e la stessa porzione può sempre dividersi in intervalli tali che la somma di quelli nei quali cadono punti del gruppo sia minore di quella quantità che più ci piace σ. Si osservi infatti che se G è il gruppo dato di ordine ν, e fra a e b (a e b inclus.) cadono m punti di $G^{(\nu)}$, e m è diverso da zero, gli intervalli coi quali questi punti si tolgono possono prendersi tutti eguali a $\frac{\sigma_\nu}{m}$, essendo σ_ν piccolo quanto si vuole, o anche minori di $\frac{\sigma_\nu}{m}$, e allora la loro somma non supererà σ_ν. Dopo poi di avere tolti questi intervalli, se in quelli restanti cadranno m' punti di $G^{(\nu-1)}$, essendo m' diverso da zero, gli intervalli coi quali questi punti si tolgono potranno prendersi uguali a $\frac{\sigma_{\nu-1}}{m'}$ o anche minori, e così la loro somma non supererà $\sigma_{\nu-1}$, e la somma di tutti gli intervalli tolti non supererà $\sigma_\nu+\sigma_{\nu-1}$; e ora, così continuando, si vede chiaramente che ammesso anche, come precedentemente, che in tutti i successivi intervalli cadano sempre un certo numero di punti di tutti i gruppi $G^{(\nu-2)}$, $G^{(\nu-3)}$, ... G_1, G_0 respettivamente (ciò che è il caso più sfavorevole), la somma degli intervalli che in fine saranno stati tolti non supererà: $\sigma_\nu+\sigma_{\nu-1}+\sigma_{\nu-2}+\,..\,+\sigma_1+\sigma_0$; e quindi, siccome ν è un numero finito, e le σ_ν, $\sigma_{\nu-1}, \sigma_{\nu-2}$, . . σ_1, σ_0 sono arbitrariamente piccole, la stessa somma potrà ridursi sempre minore di qualunque quantità data σ.

E noteremo anche che queste considerazioni intorno ai gruppi di punti si riporteranno ai gruppi di numeri, quando invece che ai punti ci riferiamo ai numeri ad essi corrispondenti.

15. Consideriamo ora un gruppo qualunque di numeri y_1, y_2, . . . y_n . . . tutti *finiti*, cioè *compresi fra due numeri finiti* α e β (α e β inclusi o nò); e indichiamo con λ un numero dotato della proprietà che nessuno dei numeri y sia maggiore di λ e tale inoltre che, per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, fra $\lambda-\sigma$ e λ (λ inclus.) esistano sempre uno o più numeri y. Questo numero λ si dirà *il limite superiore dei numeri* y_1, y_2 . . . y_n . . . o il *limite superiore del gruppo;* e se esso sarà uno di questi numeri (come avviene sempre, p: es: quando il loro numero è finito) allora

sarà al tempo stesso il loro *massimo;* mentre se non sarà uno degli stessi numeri, allora questi numeri, quantunque compresi in un intervallo finito, non ammetteranno un massimo, e λ sarà soltanto il loro limite superiore.

Ora, *qualunque sia il gruppo dei numeri dati* $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ *che supporremo tutti compresi in un intervallo finito* (α, β) (*gli estremi* α *e* β *inclusi o nò*) è facile di dimostrare *che in questo intervallo (gli estremi inclus.) esiste sempre per essi un limite superiore* (che in alcuni casi sarà al tempo stesso il loro massimo).

Si osservi infatti che i numeri dell'intervallo (α, β) (α e β inclus.) possono distinguersi in numeri che soddisfano respettivamente e numeri che non soddisfano alla condizione che vi siano numeri y maggiori di essi. Per le considerazioni generali svolte nel §. 9, si potrà dire subito che fra α e β (α e β inclus.) esisterà sempre un numero determinato λ dotato della proprietà che non vi saranno numeri y maggiori di un numero qualunque superiore a λ, mentre invece vi saranno sempre numeri y (λ inclus.) maggiori di un numero qualunque inferiore a λ; o, in altri termini, esisterà un numero determinato λ dotato della proprietà che nessun numero y' del nostro gruppo sarà maggiore di λ (perchè altrimenti vi sarebbero numeri y maggiori di qualunque numero posto fra λ e y') e tale inoltre che, per quanto piccolo si prenda il numero positivo σ, fra $\lambda - \sigma$ e λ (λ inclus.) cadranno sempre uno o più numeri y; e questo dimostra appunto quanto abbiamo enunciato.

In simil modo considerando il *limite inferiore* dei valori $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ si potrebbe dimostrare che *qualunque sia il gruppo dato dei numeri* $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ *quando essi siano compresi in un intervallo finito* (α, β) *esisterà sempre in questo intervallo (gli estremi inclus.) un limite inferiore degli stessi valori* che in alcuni casi sarà anche il loro minimo.

È poi quasi superfluo di notare che quando l'intervallo nel quale cadono i numeri $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ sia di ampiezza infinita, allora o sarà $+\infty$ il limite superiore, o sarà $-\infty$ il limite inferiore, o anche sarà ad un tempo $+\infty$ il limite superiore e $-\infty$ il limite inferiore, non ostante anche che non possa dirsi propriamente che fra i numeri dati vi siano numeri y infiniti.

Notiamo poi che, come già si disse, il limite superiore o il limite inferiore delle classi di numeri commensurabili che definiscono i numeri incommensurabili sono questi numeri incommensurabili stessi; e per ciascuna delle classi di numeri A_1'', A_2'' come quelle considerate nel §. 5 e nel §. 6 il limite inferiore o il limite superiore è il numero ad esse corrispondente.

16. Inoltre è da notare che *se i numeri $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ di un gruppo sono in numero infinito, e non ammettono un massimo, il loro limite superiore sarà sempre un numero-limite del gruppo, e quindi sarà il massimo del primo gruppo derivato;* giacchè se si osserva che, per quanto piccolo sia il numero positivo σ, fra $\lambda-\sigma$ e λ devono cadere sempre numeri y, e questi sono differenti da λ, indicando con y' uno di questi valori y compresi fra $\lambda-\sigma$ e λ, e con σ' un numero positivo minore di $\lambda-y'$, si potrà dire che anche fra $\lambda-\sigma'$ e λ dovrà esistere un altro numero y''; e essendo ora σ'' un numero positivo minore di $\lambda-y''$, fra $\lambda-\sigma''$ e λ cadrà ancora un numero y'''; e così continuando si vede chiaramente che fra λ e $\lambda-\sigma$, per quanto piccolo sia il numero positivo σ, cadranno sempre infiniti numeri y, e perciò λ sarà un numero-limite del gruppo che si considera.

Lo stesso dicasi del limite inferiore del gruppo di numeri $y_1, y_2 \dots y_n \dots$ quando essi non ammettono il minimo.

Concetto di limite. Infinitesimi e infiniti.

17. Il concetto di limite è uno dei più fondamentali di tutta la matematica. Noi lo incontriamo nella Geometria, nell'Aritmetica, nel Calcolo differenziale e integrale, nell'Analisi e in tutte le applicazioni di queste scienze, e non si troverà perciò inutile che dopo avere parlato dei numeri incommensurabili, e dei gruppi di numeri, diciamo ora alcune cose anche su questo concetto, onde cercare di stabilirlo in modo preciso e rigoroso.

Abbiasi perciò una quantità reale y che pei valori che si considerano di un'altra quantità x, escluso tutt'al più il valore particolare $x=a$, ha sempre un valore determinato e finito (cioè

che in valore assoluto non può superare un certo numero dato), sia che questi valori che si considerano di x formino una serie di quantità continue o una serie di quantità discrete (costituendo così soltanto un gruppo infinito di valori di cui a è un *punto-limite*). Allora se esisterà una quantità finita e determinata A che goda della proprietà che, preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, coll'avvicinarsi indefinitamente di x per valori decrescenti o per valori crescenti alla quantità a, che ora supponiamo finita, senza che x divenga mai$=a$, la differenza $A-y$ finisca per *divenire e restare poi costantemente* inferiore in valore assoluto al numero scelto σ, si dirà che A è il limite dei valori che si hanno per y quando x si avvicina sempre più ad a per valori decrescenti o per valori crescenti; od anche che A è il limite dei valori che si hanno per y quando ci si avvicina indefinitamente ad a dalla parte destra o dalla parte sinistra di a, intendendo con ciò che i valori di x si riguardino, come al solito, rappresentati su una linea retta. E propriamente si dirà che A è il limite dei valori che si hanno per y a destra o a sinistra di a, o anche, più semplicemente, che A è il limite di y per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=a+0$ e $x=a-0$ respettivamente (*), quando preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, si potrà trovare un numero ε, positivo nel primo caso e negativo nel secondo, tale che per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) la differenza $A-y$ sia sempre numericamente inferiore a σ.

Se poi avverrà che coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra, y prenda anche valori infiniti (cioè maggiori numericamente di qualunque numero dato) o che finiscano per divenire grandi quanto si vuole in valore assoluto, allora se per ogni numero positivo e grande quanto si vuole ω si potrà trovare un numero differente da zero ε, positivo quando i valori di x che si considerano sono a destra di a e negativo quando sono a sini-

(*) Questi simboli $a+0$ e $a-0$ sono spesso usati per indicare i punti a destra o a sinistra di a respettivamente e vicini quanto si vuole ad a (a escluso), e noi pure li useremo in questo senso.

stra, tale che per tutti i valori di x fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) y si mantenga sempre maggiore di ω in valore assoluto, si dirà che i valori di y coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra hanno per limite $\pm\infty$; o più semplicemente si dirà che y per $x=a$ a destra o a sinistra ha per limite $\pm\infty$, restandoci, così l'indeterminazione soltanto nel segno; e quando fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) y abbia sempre lo stesso segno, allora anche il segno del limite sarà determinato, e questo limite secondo i casi sarà ora $+\infty$, ora $-\infty$.

E quando infine la variabile x possa crescere indefinitamente p: es: per valori positivi e secondo certe leggi (come p: es: per numeri interi), allora se esisterà un numero finito e determinato A dotato della proprietà che, preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, si possa sempre trovare un numero positivo x' così grande che per ogni valore di x maggiore di x' che può prendersi in considerazione, la differenza corrispondente sia sempre numericamente inferiore a σ, si dirà che A è il limite dei valori che si hanno per y quando x cresce indefinitamente per valori positivi, o il limite di y per $x=+\infty$. E si dirà infine che y ha per limite l'infinito (positivo o negativo) per $x=\pm\infty$, p: es: per $x=+\infty$, quando per ogni numero arbitrariamente grande e positivo ω esisterà un numero positivo x' tale che per ogni valore di x maggiore di x', che può prendersi in considerazione, y sia sempre maggiore di ω in valore assoluto; e così, in particolare, potremo dire che delle funzioni: $(x-a)\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}}$, $\frac{1}{x-a}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $x+\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, la prima ha per limite zero per $x=a$ a destra e a sinistra di a, la seconda ha per limite $\pm\infty$ per $x=a$ a destra o a sinistra, la terza ha per limite $+\infty$ per $x=a$ a destra e $-\infty$ per $x=a$ a sinistra, la quarta ha per limite zero per $x=+\infty$, e la quinta ha per limite $+\infty$ per $x=\infty$, e $-\infty$ per $x=-\infty$.

18. Quando poi coll'avvicinarsi di x ad a indefinitamente a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori

positivi o negativi, y si comporti in modo che non si venga a rientrare in nessuno dei casi precedenti, allora si dirà che y non ha limite determinato per $x=a$ a destra o a sinistra respettivamente, o per $x=\pm\infty$; e così, in particolare, se y sarà sempre finita, essa non avrà un limite determinato per $x=a$, p: es: a destra, quando non esisterà un numero A che goda della proprietà che, per ogni valore di σ inferiore a un certo numero, esista un corrispondente ε (positivo) tale che la differenza $A-y$ pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$ sia sempre numericamente minore di σ; o, in altri termini, y non avrà un limite determinato per $x=a$ a destra o a sinistra quando, qualunque valore si attribuisca alla quantità A, esistano sempre dei valori di σ pei quali non è possibile di trovare un valore per la quantità ε che goda della proprietà che per tutti i valori di x fra a e $a+\varepsilon$ la differenza $A-y$ sia sempre numericamente minore di σ.

Similmente y non avrà un limite determinato per $x=a$ a destra o a sinistra quando coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a prenda anche valori grandi numericamente quanto si vuole, ma almeno pei valori di ω maggiori di un dato limite, per quanto piccolo si prenda il numero ε, la stessa y pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$ sia ora maggiore ora minore di ω in valore assoluto.

Enunciati analoghi si hanno per le condizioni di indeterminazione del limite di y per $x=\pm\infty$; e così in particolare si può dire che le quantità $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, $y=1+\frac{1}{x-a}\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$ per $x=a$ a destra e a sinistra, e le quantità $y=\operatorname{sen} x$, $y=x\operatorname{sen} x$ per $x=\pm\infty$ non hanno limiti determinati.

19. Queste considerazioni si estendono anche al caso in cui y varii insieme con più variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$; Così, se $a_1, a_2, \ldots a_n$ sono quantità finite e se esiste una quantità finità e determinata A che goda della proprietà che, preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, esistano sempre delle quantità differenti da zero $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ tali, che pei valori di $x_1, x_2 \ldots x_n$ che possono prendersi in considerazione fra a_1 e $a_1+\varepsilon_1$, a_2 e $a_2+\varepsilon_2, \ldots a_n$ e $a_n+\varepsilon_n$ respettivamente (il sistema $x_1=a_1, x_2=a_2, \ldots x=a_n$ escluso), la differenza $A-y$ sia

sempre numericamente minore di σ, si dice che A è il limite dei valori che si hanno per y quando $x_1, x_2 \ldots x_n$ si avvicinano indefinitamente ad $a_1, a_2 \ldots a_n$ per valori decrescenti o crescenti respettivamente secondochè le corrispondenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ sono positive o negative.

E considerazioni simili a quelle fatte sopra, trattandosi di una sola variabile, potrebbero farsi anche adesso pei casi in cui si presentano limiti infiniti o indeterminati, o in cui tutti o alcuni dei valori $a_1, a_2, \ldots a_n$ delle variabili sono infiniti.

20. Fermiamoci ora più specialmente sul caso in cui y varia insieme con un altra variabile soltanto x, per valori continui o per valori discreti, e osserviamo che per la definizione stessa di limite che abbiamo dato, i valori di y dalle due parti (destra e sinistra) del numero finito a potranno avere limiti differenti, e quindi non sarebbe preciso il dire semplicemente che y per $x=a$ ha per limite A, a meno che i valori di y dalle due parti di a non avessero uno stesso limite, o che la limitazione posta per la variabilità di x non determinasse essa stessa il senso secondo il quale x deve avvicinarsi ad a; e quando useremo questa locuzione vorrà dire che saremo in uno di questi casi, o che pel nostro studio sarà inutile l'occuparsi del senso secondo cui x si avvicina ad a.

Inoltre osserveremo esplicitamente che quando anche sia conosciuto o possa effettivamente calcolarsi il valore y_a di y per $x=a$, non si deve mai confondere questo *valore speciale* di y per $x=a$ col *limite dei valori* che si hanno per y dall'una o dall'altra parte di a. Per la definizione stessa di limite s'intende subito infatti che i significati di queste quantità sono bene differenti, poichè il limite di y dipende soltanto dai valori che si hanno per y nei punti $a+0$ o $a-0$ fuori del punto limite a, e non già dal valore speciale che si avesse per y in questo punto; e mentre in alcuni casi queste quantità possono esistere entrambe ed essere uguali, in altri casi può avvenire che esista il valore limite di y a destra o a sinistra di a e non esista il valore y_a o non abbia verun significato, come può esistere invece questo valore y_a di y e non il valore limite; o esistendo sì l'uno che l'altro possono essere differenti.

Così p: es: 1.° Se i valori di y saranno quelli di $\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$, il valore y_a di y per $x=a$ non avrà alcun significato, mentre il valore limite per $x=a$ a destra o a sinistra di a sarà uno; e se i valori di y saranno quelli della derivata della funzione che per x diverso da a è uguale a $(x-a)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$ e per $x=a$ è zero, allora siccome per x diverso da a sarà:

$$y=2(x-a)\operatorname{sen}\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a},$$

e per $x=a$ sarà invece:

$$y_a = \lim_{h=o} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = 0,$$

il valore y_a di y per $x=a$ sarà determinato e uguale a zero, mentre il valore limite dei valori che si hanno per y quando ci si avvicina indefinitamente ad a a destra o a sinistra sarà indeterminato.

2.° Se i valori di y pei varii valori di x saranno quelli della serie:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots,$$

allora il valore y_π corrispondente a $x=\pi$ sarà zero, mentre il valore limite dei valori di y a destra di π sarà (come vedremo in seguito) $-\frac{1}{2}\pi$, e quello a sinistra di π sarà $\frac{1}{2}\pi$.

Lo stesso dicasi dei valori limiti per $x=\infty$.

Notiamo però che, almeno generalmente, non si parla di limite di y per $x=a$ (a destra o a sinistra) altro che quando il valore y_a non è definito, o quando, essendo conosciuto, è differente da quello del limite, o quando infine non vuole considerarsi insieme cogli altri valori o non può ottenersi collo stesso processo che determina gli altri valori di y a destra o a sinistra di a, sia perchè questo processo per $x=a$ non ha più significato, sia perchè lo stesso valore y_a deve essere effettivamente determinato con un processo differente. E in generale quando si parla di limite vi è l' idea di non potere mai raggiungere il valore limite stesso.

21. Ricordiamo poi che intorno ai limiti si hanno i noti teoremi relativi ai limiti delle somme, dei prodotti ec. quando i termini o i fattori che compongono queste somme o questi prodotti sono in numero finito e hanno limiti determinati e finiti; e facciamo osservare esplicitamente che questi teoremi sui limiti delle somme o dei prodotti di più quantità non possono applicarsi rigorosamente (altro che sotto certe condizioni) al caso in cui il numero dei termini della somma o dei fattori del prodotto sia infinito (cioè possa supporsi maggiore di qualunque quantità assegnabile) o cresca indefinitamente coll'avvicinarsi di x ad a o col crescere indefinito di x; che anzi in molti casi essi non sono affatto giusti, e se ne ha un esempio nella serie precedente:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots ,$$

giacchè in questa, mentre il limite della sua somma per $x=\pi$ a destra di π è $-\frac{1}{2}\pi$ e a sinistra è $\frac{1}{2}\pi$, la somma dei limiti dei differenti suoi termini è zero.

22. I teoremi ora ricordati servono in molti casi a rendere più semplice la ricerca dei limiti, ma bene spesso questa ricerca resta ancora difficilissima. Sovente però non è necessario di eseguirla effettivamente, e basta limitarsi a constatare l'esistenza di un limite finito e determinato A per la quantità y che si considera; e per questo basta allora appoggiarsi sopra l'uno o l'altro dei due teoremi che ora passiamo ad esporre.

Il primo di questi teoremi serve pel caso in cui il valore di x pel quale si cerca il limite di y è finito, e dice che: *Affinchè i valori di y a destra o a sinistra di un numero finito a,* p: es: *a destra, abbiano un limite determinato e finito, è necessario e sufficiente che per ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ esista un numero positivo ε tale che la differenza $y_{a+\varepsilon}-y_{a+\delta}$ fra il valore $y_{a+\varepsilon}$ di y per $x=a+\varepsilon$ e un altro qualunque $y_{a+\delta}$ dei valori di y corrispondenti ai valori $a+\delta$ di x fra a e $a+\varepsilon$ (*a escluso*), sia numericamente minore di σ.*

Per dimostrare questo teorema, si osserva prima che se esiste

un limite determinato e finito A pei valori di y a destra di a, per ogni valore di σ esisterà un numero ε pel quale si avrà in valore

assoluto $A - y_{a+\varepsilon} < \frac{\sigma}{2}$, $A - y_{a+\delta} < \frac{\sigma}{2}$, e quindi anche $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta} < \sigma$,

per tutti i valori di δ inferiori ad ε, escluso lo zero; e si conclude perciò intanto che la condizione contenuta nell'enunciato del teorema è necessaria.

Per dimostrare poi che la stessa condizione è anche sufficiente, si osservi che se è soddisfatta, e se ε_1 è un valore di ε corrispondente al valore σ_1 di σ, indicando con α_1 un valore qualunque di y corrispondente a un valore di x fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escluso), potremo formare due numeri $\alpha_1 - 2\sigma_1$ e $\alpha_1 + 2\sigma_1$ che comprenderanno tutti i valori che si possono avere per y quando si fa variare x fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escluso), e in luogo di questi potremo prendere anche i numeri $\alpha_1 - 4\sigma_1$ e $\alpha_1 + 4\sigma_1$. Preso poi un altro numero σ_2 minore di $\frac{\sigma_1}{2}$ e trovato il corrispondente $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, si formeranno due nuovi numeri $\alpha_2 - 2\sigma_2$, $\alpha_2 + 2\sigma_2$, e questi comprenderanno i valori che si avranno per y facendo variare x fra a e $a+\varepsilon_2$ e saranno evidentemente compresi fra $\alpha_1 - 3\sigma_1$ e $\alpha_1 + 3\sigma_1$, e in luogo di essi potremo prendere i numeri $\alpha_2 - 4\sigma_2$ e $\alpha_2 + 4\sigma_2$ uno almeno dei quali sarà differente dai precedenti $\alpha_1 - 4\sigma_1$ e $\alpha_1 + 4\sigma_1$, essendo però tutti e due compresi fra questi; e così continuando giungeremo a formare due serie di numeri:

$$A'_1 = (\alpha_1 - 4\sigma_1\,,\ \alpha_2 - 4\sigma_2\,,\ \alpha_3 - 4\sigma_3\,, \ldots)$$
$$A'_2 = (\alpha_1 + 4\sigma_1\,,\ \alpha_2 + 4\sigma_2\,,\ \alpha_3 + 4\sigma_3\,, \ldots)$$

che daranno luogo ad una scomposizione (A'_1, A'_2) di una serie di numeri in due classi come quella considerata nel §. 6; e il numero determinato e finito A che corrisponderà (§. 6) a questa scomposizione sarà appunto, come è facile a riscontrarsi, il limite dei valori di y a destra di a; talchè si può ora evidentemente concludere che la condizione contenuta nell'enunciato del teorema dato sopra è anche sufficiente per l'esistenza del limite, e questo limite può anche essere trovato effettivamente col processo stesso che qui si è tenuto per dimostrarne l'esistenza.

23. In modo del tutto simile si dimostra l'altro teorema di cui sopra abbiamo parlato, che serve utilmente pel caso in cui si cerca il limite di y per valori infiniti della variabile x, e che può enunciarsi dicendo che: *Affinchè i valori di y per valori infinitamente grandi di x positivi o negativi, p: es: per valori positivi, abbiano un limite finito e determinato, è necessario e sufficiente che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esista un numero positivo x' talmente grande che per qualunque valore positivo di x maggiore di x' si abbia sempre in valore assoluto* $y_{x'} - y_x < \sigma$.

È da notare che questi due teoremi possono anche leggermente modificarsi sostituendo nel primo alla differenza $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ l'altra $y_{a+\delta'} - y_{a+\delta}$ fra due valori $y_{a+\delta}$ e $y_{a+\delta'}$ di y corrispondenti a due valori qualunque $a+\delta$ e $a+\delta'$ di x compresi fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso), e nel secondo sostituendo alla differenza $y_{x'} - y_x$ la differenza $y_{x_1} - y_x$ fra due valori di y corrispondenti a due valori qualunque x e x_1 di x non inferiori ad x'.

24. Supponiamo ora che i valori che si considerano di y a destra o a sinistra di a, o per valori crescenti indefinitamente di x siano sempre finiti ma non abbiano un limite determinato. Allora pei due teoremi precedenti dovranno esistere certi valori di σ pei quali non è più possibile di trovare il numero ε o il numero x' corrispondente; e quindi, se saremo p: es: nel primo caso, indicando con σ uno di tali numeri positivi e sufficientemente piccoli, e con $(a, a+\varepsilon)$ un intervallo qualunque a destra o a sinistra di a (a escluso), esisterà in questo intervallo un punto $a+\delta$ pel quale si avrà numericamente $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta} \geq \sigma$, e poi anche nell' intervallo $(a, a+\delta)$ (a escluso) esisterà un punto $a+\delta'$ pel quale si avrà numericamente $y_{a+\delta} - y_{a+\delta'} \geq \sigma$, e nell' intervallo $(a, a+\delta')$ esisterà ancora un punto $a+\delta''$ pel quale si avrà pure numericamente $y_{a+\delta'} - y_{a+\delta''} \geq \sigma$, e così di seguito indefinitamente. Osservando dunque che y si mantiene finito in tutto l'intervallo $(a, a+\varepsilon)$ e così anche nei seguenti, si concluderà che le differenze successive $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$, $y_{a+\delta} - y_{a+\delta'}$, $y_{a+\delta'} - y_{a+\delta''}$.... non dovranno avere sempre lo stesso segno; e quindi poichè osservazioni analoghe possono farsi anche per l'altro caso in cui y deve crescere

indefinitamente, si potrà ora evidentemente concludere che *quando i valori di y coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a, a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x si mantengono sempre finiti ma non hanno un limite determinato, essi dovranno oscillare continuamente, e almeno alcune di tali oscillazioni dovranno farsi sempre fra limiti differenti fra loro più di una quantità determinata diversa da zero*; come avviene p: es: nel primo caso per la funzione $\text{sen}\frac{1}{x-a}$, e nel secondo per la funzione *sen* x.

E per quanto abbiamo detto nel §. 18 si avranno oscillazioni nei valori di y anche quando coll' avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra o col crescere indefinitamente di x, y finisca per prendere anche valori maggiori di qualunque quantità data senza però che possa dirsi che ha per limite l' infinito; ma allora i limiti entro i quali si faranno le oscillazioni finiranno per essere discosti di più di qualunque quantità data, o, come si dice, queste oscillazioni finiranno per avere un ampiezza maggiore di qualunque numero dato.

È però da notare che oscillazioni nei valori di y *potranno* avvenire anche quando il limite di questi valori per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\infty$ sia una quantità finita e determinata A, giacchè dalla definizione di limite non viene di necessità che, a partire da un certo valore di δ, o di x, la differenza $y_{a+\delta}-A$ o l'altra y_x-A col diminuire indefinitamente di δ, o col crescere sempre più di x, conservi sempre lo stesso segno, o vada sempre diminuendo in valore assoluto; ma in questo caso però queste oscillazioni finiranno per avvenire fra limiti vicini più di qualunque quantità data, o, come si dice, finiranno per avere tutte una ampiezza minore di qualunque numero dato, senza però che sia necessario che questa ampiezza (che pure diminuisce oltre ogni limite) vada *costantemente* diminuendo.

E così anche potranno aversi oscillazioni nei soliti valori di y quando il loro limite sia l'infinito.

25. Le osservazioni precedenti conducono subito a dimostrare che: *Se coll' avvicinarsi di x ad una quantità finita a, a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori*

positivi o per valori negativi, p: es: per valori positivi, un' altra quantità y conserva sempre lo stesso segno e non cresce o non decresce mai in valore assoluto, restando però sempre minore di un certo numero finito, essa per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\infty$ avrà un limite determinato e finito; giacchè, siccome i valori di y sono sempre finiti e non possono oscillare coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra o col crescere indefinitamente di x, essi per le osservazioni del paragrafo precedente dovranno tendere verso un limite finito e determinato.

Notiamo che questo teorema risulta subito anche dalle considerazioni generali esposte nel §. 15 intorno ai limiti superiori e inferiori dei gruppi di numeri, poichè si dimostra facilmente che pei gruppi di numeri formati dai valori di y nel caso in cui questi valori non vadano crescendo e in quello in cui non vadano decrescendo, il limite inferiore o superiore respettivamente è il limite degli stessi valori y.

E notiamo anche che da questo teorema risulta che, se coll'avvicinarsi di x ad una quantità a a destra o a sinistra, o col crescere indefinito di x, una quantità y finisce per non crescere o non decrescere più, essa per $x=a$ o per $x=\infty$ avrà sempre un limite finito o infinito.

26. Prima di lasciare questo soggetto dei limiti esporremo anche le seguenti definizioni e osservazioni generali.

Si dice che una quantità y diviene *infinitesima*, col tendere di x ad a a destra o a sinistra o col crescere indefinitamente di x, o anche, per semplicità di locuzione, per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$, quando il limite di y per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$ è uguale a zero. E si dice invece che una quantità y per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$ diviene *infinita*, quando coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra o col crescere indefinitamente di x per valori positivi o per valori negativi, y finisce per prendere anche valori grandi quanto si vuole e ha per limite $\pm\infty$; e talvolta eccezionalmente si dice che y diviene infinita per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$ anche quando, sebbene, col solito variare di x, y prenda anche valori numericamente maggiori di qualunque

quantità data, non ha però propriamente verun limite (§. 18). E usando queste locuzioni, faremo esplicitamente osservare che per quanto fu notato nel §. 20, il dire *in modo assoluto* che una quantità *y è zero o infinito* per $x=a$, o per $x=\pm\infty$, quando questo $\pm\infty$ di x si riguardi non come un limite ma come un valore speciale di x, non è lo stesso che dire che essa *diviene infinitesima o infinita* per $x=a$ a destra o a sinistra (o semplicemente per $x=a$ quando il senso sia indifferente), o per $x=\pm\infty$, quando il $\pm\infty$ si riguardi come limite di valori sempre crescenti di x; giacchè in questi ultimi casi non si tratta di un valore speciale di y per un valore particolare di x, ma si tratta del limite o del limite superiore o inferiore di una serie di valori y. E in generale si deve notare che il concetto d' infinitesimo non può affatto esser disgiunto da quello di limite, e quando si dice che una quantità y è o diviene infinitesima per $x=a$ non si può mai parlare di un valore determinato di y, ma di una quantità il cui valore và impiccolendo fino a divenire e restar poi sempre minore di qualunque quantità data per modo che il suo limite per $x=a$ sia zero. E si può osservare inoltre che mentre la somma algebrica anche di un numero infinito di quantità tutte eguali a zero in modo assoluto è sempre zero, la somma algebrica di un numero infinito di quantità infinitesime può non essere nè zero nè infinitesima, e può invece avere per limite anche l' infinito, o essere indeterminata, poichè come già fu osservato il limite della somma di un numero infinito di quantità può non essere uguale alla somma dei loro limiti.

27. Si abbiano ora due quantità y e y_1, che per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$ divengono insieme infinitesime o infinite, e supponiamo che di esse almeno la seconda non prenda mai il valore zero o il valore infinito quando x è differente da a e sufficientemente vicino ad a, o quando x è sufficentemente grande. Allora il rapporto $\frac{y}{y_1}$ avrà un significato, e per $x=a$ a destra o a sinistra, o per $x=\pm\infty$, potrà avere per limite zero o una quantità finita e determinata, o $\pm\infty$, o non avere un limite determinato; e noi nel primo caso diremo che y per $x=a$ a destra o a

sinistra o per $x=\pm\infty$ diviene infinitesima o infinita di ordine respettivamente *maggiore* o *minore* di y_1, nel secondo che y e y_1 divengono infinitesime o infinite dello *stesso ordine,* e nel terzo che y diviene infinitesima o infinita di ordine respettivamente *minore* o *maggiore* di y_1. E nel quarto caso poi, se il rapporto $\frac{y}{y_1}$, senza avere un limite determinato, resterà sempre in valore assoluto maggiore di un certo numero differente da zero e positivo e minore di un certo numero pure positivo e finito, si potrà dire ancora che per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$, y e y_1 divengono infinitesime o infinite *dello stess' ordine,* mentre se il rapporto $\frac{y}{y_1}$ potrà anche accostarsi quanto si vuole a zero o passare per zero, restando però sempre minore in valore assoluto di un certo numero positivo, potremo dire soltanto che y diviene nei soliti casi infinitesima o infinita di ordine *non minore* o *non maggiore* respettivamente di y_1, e se il rapporto $\frac{y}{y_1}$ non potrà accostarsi a zero col suo valore assoluto più di una certa quantità, ma potrà prendere anche valori numericamente maggiori di qualunque numero dato, allora potremo dire soltanto che y nei soliti casi diviene infinitesima o infinita di ordine *non maggiore* o *non minore* respettivamente di y_1; e nel caso infine che il rapporto $\frac{y}{y_1}$ possa al tempo stesso accostarsi quanto si vuole a zero o passare per zero e prendere valori numericamente maggiori di qualunque numero dato, non potremo propriamente paragonare, come negli altri casi, gli ordini di infinitesimo o di infinito di y e di y_1.

28. In particolare se le quantità $y_1=(x-a)^m$, e $y_1=\frac{1}{x^m}$, ove m è positivo, si riguardano come infinitesime di ordine m per $x=a$ o per $x=\pm\infty$, e le quantità $y_1=\frac{1}{(x-a)^m}$, $y_1=x^m$, ove m è pure positivo, si riguardano invece come infinite di ordine m per $x=a$ o per $x=\pm\infty$, potremo dire che per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$, y sarà infinitesima o infinita di ordine m

se le quantità $\frac{y}{(x-a)^m}$, $x^m y$, o le altre $(x-a)^m y$, $\frac{y}{x^m}$ respettivamente, coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori positivi o per valori negativi, tenderanno verso limiti determinati e finiti differenti da zero, o oscilleranno fra numeri finiti mantenendosi però sempre discoste da zero più di un certo numero determinato.

E dietro queste denominazioni si avranno quantità y che diverranno infinitesime o infinite di ordini positivi *determinati* razionali (interi o fratti) o irrazionali. Oltre a ciò si può osservare che le quantità $\log(x-a)$, $\log^2(x-a)$, $\log^3(x-a)$,... e così le potenze e i prodotti di queste quantità, o almeno le loro parti reali, per $x=a$ divengono infinite, ma il loro ordine d' infinito non può dirsi determinato, e deve riguardarsi come minore di qualunque quantità data, sebbene differente da zero, perchè per m, m_1, m_2,... m_n positivi e per n finito i prodotti della forma:

$$(x-a)^m[\log(x-a)]^{m_1}[\log^2(x-a)]^{m_2}\ldots[\log^n(x-a)]^{m_n}$$

per $x=a$ hanno sempre per limite zero. Similmente le quantità $\log x$, $\log^2 x$, $\log^3 x$,... e così i loro prodotti e potenze (o le loro parti reali) col crescere indefinito di x per valori positivi o per valori negativi divengono infinite, ma di un ordine che può soltanto riguardarsi come minore di qualunque quantità data, sebbene differente da zero; talchè possiamo dire che, oltre agli infinitesimi e infiniti di ordini *determinati* razionali e irrazionali, avremo altri infinitesimi e infiniti che rispetto all' ordine non saranno comparabili con questi altro che nel senso del *maggiore* o del *minore*; e tali p: es: saranno per $x=a$ gli infinitesimi delle quantità della forma:

$$(x-a)\log(x-a)\log^2(x-a)\ldots\log^n(x-a)$$

ove n è finito, e gli infiniti delle quantità:

$$\frac{1}{(x-a)\log(x-a)\log^2(x-a)\ldots\log^n(x-a)},$$

che sono propriamente di ordine inferiore al primo, ma non di

un ordine determinato, poichè si trova soltanto che quest'ordine dovrebbe differire dal primo meno di qualunque quantità data.

Notiamo ancora che come i logaritmi conducono ad esempii di quantità che divengono infinitesime o infinite di ordini che non sono determinati, e che in certo modo possono venire riguardati come infinitesimi, le esponenziali $e^{\frac{1}{x-a}}$, e^{x} ci danno invece esempii di quantità che divengono infinitesime o infinite di ordine superiore a qualunque quantità data, o, come si dice, di ordine infinito.

Infine osserviamo che gli infiniti di una quantità quando sono di ordine determinato, possono venire riguardati come infinitesimi di ordine negativo e viceversa.

Concetto di funzione. — Continuità e discontinuità.

29. Premesse le considerazioni precedenti sui numeri incommensurabili, sui gruppi di punti, e sui limiti, passiamo a occuparci delle funzioni, e incominciamo dallo stabilirne il concetto per quelle di una sola variabile reale.

Gli antichi usarono dapprima la parola funzione per esprimere le varie potenze di una stessa quantità, e solo da Leibnitz, dai Bernoulli e più specialmente poi da Eulero fu esteso il concetto di funzione fino a comprendere tutte le espressioni analitiche che contengono in un modo qualunque le variabili corrispondenti. Nel secolo attuale poi Dirichlet dette per la parola funzione un significato indipendente da qualunque ipotesi sulla possibilità di una espressione analitica, e chiamò funzione di una variabile reale x in un dato intervallo ogni quantità y che per ogni valore speciale di x compreso nello stesso intervallo (gli estremi inclusi) ha un valore *unico e determinato* che è conosciuto o può sempre aversi, senza occuparsi se la determinazione di questo valore di y si faccia per mezzo di operazioni analitiche sulla variabile stessa x, o in altro modo qualunque.

Noi adotteremo questo concetto di funzione, limitandoci specialmente alle funzioni reali e finite; e così p: es: sarà funzione

di x in un intervallo qualunque la quantità y che è somma della serie sempre convergente:

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\, x}{n},$$

perchè per ogni valore di x in quell'intervallo y avrà un valore finito e determinato; e sarà funzione della x in un certo intervallo una quantità y che pei valori razionali di x nello stesso intervallo è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno; e sarà pure funzione di x in un dato intervallo una quantità che pei valori razionali di x nello stesso intervallo è uguale a x e pei valori irrazionali è uguale a x^2,.... Invece se per una quantità y fosse detto soltanto che in un intervallo che comprende il punto $x=0$ essa è uguale a $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, non si potrebbe considerarla come funzione di x in tutto lo stesso intervallo, perchè il suo valore per $x=0$ non sarebbe determinato; e solo diverrebbe una funzione di x in tutto lo stesso intervallo quando le si assegnasse un valore speciale qualunque anche per $x=0$, come p: es: quando si stabilisse che per $x=0$ essa prende il valore zero.

E qui è da osservare che definite le funzioni in un modo così generale, finchè non si pongano altre condizioni non si avranno per esse proprietà generali che includano delle relazioni fra i valori che esse hanno in punti differenti qualunque (cioè per valori differenti di x) quand'anche questi punti si suppongano arbitrariamente vicini l'uno all'altro, perchè i valori che esse avranno in tali punti potranno essere tutt'affatto qualunque e indipendenti del tutto gli uni dagli altri; (e ciò nonostante che debbano esservi certe leggi determinate mediante le quali riescano determinati i singoli valori della funzione in ogni punto, giacchè evidentemente senza queste leggi, essendo infiniti i punti di un intervallo qualunque, non si potrebbe mai dire pienamente determinata la funzione); talchè in particolare, senza fare qualche limitazione, non si potrà affatto parlare di continuità, di differenziabilità ec....

E con tale definizione si dà luogo naturalmente anche alla domanda « se, conservando tutta la generalità contenuta nella « definizione, una funzione y di x data in un certo intervallo « possa sempre o nò esprimersi analiticamente per tutti i valori « della variabile nell'intervallo stesso per una o più serie finite o « infinite di operazioni di calcolo da farsi sulla variabile », e a questa domanda, nello stato attuale della scienza, non può ancora rispondersi in modo pienamente soddisfacente, poichè, quantunque si sappia ora che per estesissime classi di funzioni e anche per funzioni che presentano grandissime singolarità può darsi una espressione analitica, resta però ancora il dubbio che, non facendo nessuna limitazione, possano anche esistere funzioni per le quali ogni espressione analitica, almeno cogli attuali segni dell'analisi, è del tutto impossibile.

Volendo ora fare uno studio sulle funzioni di una variabile reale x quali le abbiamo definite, incominceremo dal cercare quali distinzioni possono farsi in esse quando si ha riguardo alla continuità o alle discontinuità che esse possono presentare pei differenti valori della variabile nell'intervallo che si considera.

30. Indichiamo perciò con $f(x)$ la funzione che consideriamo in un intervallo finito (α, β) e ricordiamo espressamente che per la definizione che abbiamo data, essa avrà un valore unico e determinato in ogni punto dello stesso intervallo (i limiti inclus.); e a meno che non si avverta espressamente il contrario, supponiamo sempre che essa sia reale e sia finita (cioè i suoi valori siano tutti compresi fra due numeri finiti).

Diremo che essa è *continua* per $x = a$ o nel punto a ove ha il valore $f(a)$, quando per ogni numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, esisterà un numero differente da zero e positivo ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε la differenza $f(a+\delta)-f(a)$ sia numericamente minore di σ; o, in altri termini, diremo che $f(x)$ è continua nel punto $x=a$ ove ha il valore $f(a)$, quando il limite dei suoi valori a destra e a sinistra di a è lo stesso ed è uguale a $f(a)$, o anche, se vuolsi, quando le quantità $f(a+h)$ e $f(a-h)$, ove h è positivo, per $h=0$ hanno per limite $f(a)$; o anche infine

quando le quantità $f(a+h)-f(a)$, $f(a-h)-f(a)$ divengono infinitesime insieme con h.

Diremo poi che $f(x)$ è *discontinua* per $x=a$ quando non esiste per ogni valore positivo di σ un valore corrispondente positivo di ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε si abbia sempre numericamente $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$; o in altri termini, diremo che $f(x)$ è discontinua per $x=a$ quando i valori $f(a+h)$ di $f(x)$ a destra di a e quelli $f(a-h)$ di $f(x)$ a sinistra di a non hanno limiti determinati sì gli uni che gli altri, o avendoli sono differenti dalle due parti di a, o essendo uguali differiscono dal valore $f(a)$ che ha la funzione nel punto a.

S'intende però che se a fosse un estremo α o β dell'intervallo, allora, tanto nel caso della continuità quanto in quello della discontinuità, non si potrebbe parlare di valori di $f(x)$ altro che da una parte di questo estremo, e quindi non si potrebbero considerare che i valori di $f(a+h)$ o quelli di $f(a-h)$, e il valore $f(a)$.

31. Faremo poi sulle discontinuità che $f(x)$ può presentare nel punto a, le seguenti distinzioni.

1.° Nel caso che il punto a non sia un estremo dell'intervallo e la discontinuità che si ha in questo punto sia di quelle per le quali i valori $f(a+h)$ e $f(a-h)$ di $f(x)$ a destra e a sinistra di a hanno uno stesso limite determinato A ma differente dal valore $f(a)$ di $f(x)$ nel punto a, allora siccome la continuità della funzione in questo punto potrebbe ristabilirsi quando invece di $f(a)$ si prendesse A pel valore della funzione nel punto stesso, noi diremo con Riemann che si ha in a una *discontinuità che può togliersi* mutando il valore della funzione in quel punto.

2.° Nel caso poi che il punto a ove $f(x)$ è discontinua non sia un estremo dell'intervallo, e che i valori di $f(x)$ da una parte di a abbiano per limite $f(a)$, e quelli dall'altra parte non abbiano verun limite determinato o lo abbiano differente da $f(a)$, si dirà che $f(x)$ è *continua da una parte* (a destra o a sinistra) di a e è *discontinua dall'altra*, o più semplicemente si dirà che $f(x)$ è continua o è discontinua *soltanto da una parte* di a. (*).

(*) È da notare che ora che si ha il concetto di funzione continua in un punto a o da una parte di questo punto, si può dire che se y è una quantità che è per data *tutti*

3.° Se da una parte di un punto a si ha discontinuità in $f(x)$, e questa discontinuità è tale che i valori di $f(x)$ dalla stessa parte di a hanno un limite determinato, si dirà che essa è una discontinuità *ordinaria* o discontinuità di *prima specie;* mentre se gli stessi valori di $f(x)$ non hanno un limite determinato, la discontinuità si dirà di *seconda specie;* e così le discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione nel punto corrispondente saranno sempre discontinuità ordinarie dalle due parti di questo punto; e quando la funzione $f(x)$ in un punto a che non è un estremo dell' intervallo sarà discontinua, potrà avvenire che essa sia continua da una parte di a e dall' altra abbia una discontinuità ordinaria o una discontinuità di seconda specie, o, essendo discontinua dalle due parti di a, abbia da ambedue le parti una discontinuità ordinaria o una discontinuità di seconda specie, o abbia invece da una parte una discontinuità ordinaria, e dall' altra una discontinuità di seconda specie; e cambiando il valore della funzione in questo punto potremo sempre togliere la discontinuità almeno *da una parte* se essa è di prima specie, ma non già se è di seconda specie.

E così quando il punto di discontinuità di $f(x)$ sia un estremo dell'intervallo, se la discontinuità sarà di quelle che ora abbiamo chiamate ordinarie potremo anche riguardarla come una di quelle che possono togliersi mutando il valore della funzione in quel punto.

32. Merita poi di essere osservato che quando da una parte di un punto a si avrà una discontinuità di seconda specie, i valori di $f(x)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a dalla stessa parte faranno continue oscillazioni (in numero infinito) di ampiezza maggiore di un certo numero dato (§. 24), perchè allora questi valori di $f(x)$ non avranno un limite determinato. E di ciò si ha un esempio nella funzione che pei valori di x differenti da a è

i valori di x compresi in un intervallo $(a, a \pm \varepsilon)$ a destra o a sinistra di a (a inclus.), il caso (§. 20) in cui il valore y_a di y per $x=a$ coincide col limite dei valori che si hanno per y a destra o a sinistra di a, è soltanto quello in cui y, considerata come funzione di x, è funzione continua di x almeno dalla parte destra o dalla parte sinistra di a.

uguale a sen $\frac{1}{x-a}$ e per $x=a$ è zero, poichè questa funzione per $x=a$ a destra e a sinistra ha una discontinuità di seconda specie, e coll' avvicinarsi indefinitamente di x ad a dall' una o dall' altra parte di a oscilla continuamente fra -1 e 1.

Inoltre si può anche notare che una funzione continua a destra o a sinistra di un punto a, o che abbia semplicemente una discontinuità ordinaria da una delle due parti di questo punto, potrà fare essa pure in vicinanza del punto a dalla parte che si considera un numero infinito di oscillazioni, ma l' ampiezza di queste oscillazioni impiccolirà oltre ogni limite coll' avvicinarsi indefinitamente di x ad a (§. 24). Così avviene p: es: nel punto $x=0$ per la funzione che per x diverso da zero è uguale a $x\text{sen}\frac{1}{x}$, e per $x=0$ è zero o ha un altro valore finito qualunque.

33. Inoltre è da osservare che una funzione potrà essere continua o avere soltanto una discontinuità ordinaria da una parte di un punto a p: es: a destra, e essere poi discontinua, e anche discontinua di seconda specie, a sinistra di punti che si trovano nelle parti a destra di ogni intorno di a arbitrariamente piccolo (cioè di punti situati a destra di a e vicini quanto si vuole ad a); e viceversa può aversi discontinuità anche di seconda specie nel punto a a destra, e aversi continuità a sinistra di punti che siano vicini quanto si vuole ad a e siano a destra di a.

L' esservi infatti continuità a destra di un punto a, o anche soltanto l'esservi una discontinuità ordinaria porta che per ogni numero positivo σ esista un numero positivo ε tale che nell' intervallo $(a, a+\varepsilon)$, che ha l'*estremo inferiore* in a, si abbia numericamente:

$$(1) \qquad f(a+\varepsilon)-f(a+\delta) < \sigma.$$

Invece l'esservi continuità o soltanto una discontinuità ordinaria a sinistra di un punto $x=a+\varepsilon'$ che si trova a destra di a e vicino quanto si vuole ad a, porta che per ogni numero positivo σ_1 esista un intervallo $(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, a+\varepsilon')$, *coll'estremo superiore*

nel punto fisso $a+\varepsilon'$, per ogni punto x del quale si abbia numericamente:

$$(2) \qquad f(a+\varepsilon'-\varepsilon_1)-f(x)<\sigma_1;$$

e questo mostra subito quanto abbiamo detto sopra, giacchè delle due condizioni (1) e (2) l'una non trascina di necessità l'altra, inquantochè se coll'impiccolire di σ continua sempre ad esistere un intervallo $(a, a+\varepsilon)$ coll'estremo inferiore in a e nel quale è soddisfatta la condizione (1), non ne viene di necessità che coll'impiccolire di σ_1 debba continuare ad esistere un intervallo $(a+\varepsilon'-\varepsilon'_1, a+\varepsilon')$ coll'estremo superiore nel *punto fisso* $a+\varepsilon'$ nel quale sia soddisfatta la condizione (2), e viceversa.

Del resto tali singolarità si riscontrano effettivamente nelle funzioni che considereremo in seguito che sono continue nei punti irrazionali (cioè nei punti che corrispondono a valori irrazionali di x) di un dato intervallo e sono discontinue nei punti razionali dello stesso intervallo; e si riscontrano anche nella funzione che per x differente da a è uguale a sen $\frac{1}{x-a}$ e per $x=a$ è zero, poichè questa funzione ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x=a$ a destra e a sinistra, mentre è continua in tutti i punti vicini quanto si vuole ad a a destra e a sinistra.

34. Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ abbia una discontinuità (di prima o di seconda specie) da una parte di un punto a p: es: a destra, e osserviamo che tutti i numeri positivi σ differenti da zero possono distinguersi in numeri che soddisfano respettivamente e numeri che non soddisfano alla condizione che per essi sia sempre possibile di trovare un intervallo a destra di a $(a, a+\varepsilon)$ nel quale sia sempre in valore assoluto: $f(x)-f(a)<\sigma$. Allora per quanto si è detto nel §. 9 si vedrà subito che deve esistere un numero σ' (limite inferiore dei numeri σ pei quali esiste il detto intervallo $(a,a+\varepsilon)$) che eseguirà la scomposizione dei numeri positivi nelle due classi indicate, e questo numero σ' sarà differente da zero, perchè altrimenti non si avrebbe in $f(x)$

la supposta discontinuità, e godrà della proprietà che per ogni numero $\sigma > \sigma'$ esisterà un intervallo $(a, a+\varepsilon)$ a destra di a nel quale si avrà sempre numericamente $f(x) - f(a) < \sigma$, mentre per ogni numero positivo $\sigma < \sigma'$ in qualunque intervallo $(a, a+\varepsilon)$ esisteranno invece dei valori di x per quali sarà numericamente $f(x) - f(a) > \sigma$. Questo numero σ' perciò si dirà il *salto* della funzione nel punto a *a destra*.

Analogamente si avrà un *salto* σ' *a sinistra* di a quando $f(x)$ sia discontinua in a a sinistra. E quando $f(x)$ sia discontinua dalle due parti di a si chiamerà *salto* della funzione nel punto a il maggiore fra i due numeri che rappresentano il salto a destra e quello a sinistra.

E ora, con queste denominazioni potremo dire evidentemente che quando una funzione è tale che da una parte di un punto a p: es: a destra è continua o ha soltanto una discontinuità ordinaria, e a sinistra di punti che sono a destra di a e vicini quanto si vuole ad a è discontinua, i salti che essa farà a sinistra di questi punti dovranno impiccolire oltre ogni limite coll'avvicinarsi indefinitamente degli stessi punti ad a, ma non viceversa; giacchè, come si è detto nel paragrafo precedente, esistono anche funzioni, come la solita funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, che sono continue in questi punti, e hanno una discontinuità di seconda specie nel punto a.

35. Diciamo poi fin d'ora che quando $f(x)$ a destra o a sinistra di un punto a è continua o ha soltanto una discontinuità ordinaria, dietro le notazioni di *Dirichlet*, si suole indicare con $f(a+0)$ o $f(a-0)$ il limite per h positivo e tendente a zero dei valori $f(a+h)$ o $f(a-h)$ che si hanno per $f(x)$ dalla parte corrispondente di a (destra o sinistra). Conseguentemente quando in a vi sia continuità dalle due parti, o vi sia una di quelle discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione in quel punto, le stesse quantità $f(a+0)$ e $f(a-0)$ saranno uguali fra loro e nel primo caso saranno anche uguali a $f(a)$. Le stesse quantità però non avranno verun significato quando la discontinuità che si ha in $f(x)$ dalla parte di a cui esse si riferiscono sia una discontinuità di seconda specie.

Nel caso poi che la discontinuità di $f(x)$ per $x=a$ da una almeno delle due parti p: es: a destra sia una discontinuità ordinaria il salto corrispondente della funzione sarà evidentemente il valore assoluto di $f(a+0)-f(a)$; e similmente il valore assoluto di $f(a-0)-f(a)$ sarà il salto di $f(x)$ nel caso che si abbia una discontinuità ordinaria a sinistra di a.

36. Adesso troviamo utile di esporre il seguente teorema di Weierstrass relativo ai limiti superiori e inferiori (o massimi o minimi) dei valori di una funzione (reale e sempre finita) in un dato intervallo.

Sia perciò $f(x)$ la nostra funzione data arbitrariamente nell'intervallo da α e β (i limiti inclusi). Pel teorema del §. 15 si può dire intanto che esisterà un limite superiore λ e un limite inferiore μ dei valori della stessa funzione in questo intervallo; e ora ci proponiamo di mostrare che *in questo intervallo esiste sempre almeno un punto determinato* x' (che può essere anche un estremo dell'intervallo stesso) *dotato della proprietà che pei valori di* $f(x)$ *corrispondenti ai punti di ogni intorno di* x' (§. 11), *anche arbitrariamente piccolo il limite superiore è ancora* λ (Weierstrass).

La dimostrazione di questo teorema si fà ancora col processo della divisione dell'intervallo in $2, 2^2, 2^3 \dots 2^n \dots$ parti uguali. Supponiamo perciò come al solito $\beta > \alpha$, e dividiamo l'intervallo da α a β in due intervalli uguali $\left(\alpha, \frac{\beta+\alpha}{2}\right)$, $\left(\frac{\beta+\alpha}{2}, \beta\right)$, e immaginiamo determinati i limiti superiori λ_1, e λ_2 dei valori di $f(x)$ corrispondenti ai valori di x che cadono nel primo e nel secondo di questi intervalli respettivamente. È chiaro che nessuno di questi numeri λ_1 e λ_2 potrà essere superiore a λ, poichè altrimenti nell'intervallo (α, β) vi sarebbero valori di $f(x)$ maggiori di λ, e neppure potranno essere tutti e due inferiori a λ, poichè altrimenti se fosse p: es: $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda$, fra λ_2 e λ non vi sarebbero valori di $f(x)$ nell'intervallo (α, β), e per conseguenza nell'un caso e nell'altro λ non sarebbe il limite superiore corrispondente ai valori di $f(x)$ nello stesso intervallo; quindi uno almeno degli stessi numeri λ_1 e λ_2 dovrà essere uguale a λ. Ora se $\lambda_1 = \lambda$, qua-

lunque sia del resto λ_2 (cioè $\leq \lambda$), noi ci occuperemo dell'intervallo cui corrisponde λ_1 (cioè del primo), mentre se λ_1 non è uguale a λ, ciò che porta che allora si abbia $\lambda_2 = \lambda$ noi ci occuperemo del secondo intervallo; e quindi ponendo $\beta - \alpha = \gamma$, e indicando con α_1 un numero uguale a zero o a uno secondochè λ_1 è o nò uguale a λ, e ponendo $x_1 = \alpha + \frac{\gamma}{2}\alpha_1$, sarà $\left(x_1, x_1 + \frac{\gamma}{2}\right)$ l'intervallo di ampiezza uguale a $\frac{\gamma}{2}$ di cui ci occuperemo, e nel quale il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ.

Operando ora in modo simile su questo intervallo, e indicando con α_2 un nuovo numero uguale a zero o a uno secondochè il limite superiore di tutti i valori di $f(x)$ corrispondenti al primo dei nuovi intervalli ottenuti è uguale o nò a λ, e ponendo $x_2 = x_1 + \frac{\gamma}{2^2}\alpha_2$, si otterrà l'intervallo $\left(x_2, x_2 + \frac{\gamma}{2^2}\right)$ nel quale il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ; e così continuando col porre successivamente $x_3 = x_2 + \frac{\gamma}{2^3}\alpha_3, \ldots\, x_n = x_{n-1} + \frac{\gamma}{2^n}\alpha_n$ ove $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ hanno al solito i valori 0 o 1 che si determinano successivamente nel modo che si è detto, dopo n di queste operazioni successive si giungerà all'intervallo $\left(x_n, x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right)$ di ampiezza $\frac{\gamma}{2^n}$ nel quale il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ.

Ora, considerando le due serie di numeri $(\alpha, x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\left(\beta, x_1 + \frac{\gamma}{2}, x_2 + \frac{\gamma}{2^2}, \ldots x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right)$ che così si ottengono, si vede che esse, come quelle dei §§. 6 e 9, col crescere sempre più di n danno luogo ad una scomposizione di numeri in due classi alla quale corrisponde un numero determinato x', che può essere anche un estremo α o β dell'intervallo dato, e che è compreso negli intervalli $\left(x_n, x_n + \frac{\gamma}{2^n}\right)$ che successivamente si ottengono (i limiti inclus.); e ora sarà facile di vedere che questo numero x' è appunto quello del quale si vuole dimostrare l'esistenza.

Osservando infatti che esso giace negli intervalli $\left(x_n, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ (i limiti inclus.) si vede subito che uno almeno dei due intervalli $(x_n\, x')$, $\left(x', x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ sarà di ampiezza differente da zero e in uno almeno di essi il limite superiore dei valori di $f(x)$ sarà ancora λ; quindi, poichè si ha evidentemente $x'-x_n \leq \frac{\gamma}{2^n}$, e $x_n+\frac{\gamma}{2^n}-x' \leq \frac{\gamma}{2^n}$, e n può prendersi così grande che $\frac{\gamma}{2^n}$ sia un numero minore di quella quantità che più ci piace, si conclude che effettivamente, qualunque sia il numero positivo e arbitrariamente piccolo ε, pei valori di x che cadono in uno almeno dei due intervalli $(x'-\varepsilon, x)$, $(x', x+\varepsilon)$, e quindi anche pei valori di x fra $x'-\varepsilon$ e $x'+\varepsilon$ che cadono nell'intervallo dato da α a β (α e β inclus.) (o, il che è lo stesso, pei punti di ogni intorno di x') il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ; e questo dimostra il teorema, poichè dal processo tenuto per trovare il punto x' risulta anche che di tali punti potrebbe esisterne più di uno.

Un teorema analogo si ha per il limite inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (α, β).

37. Poichè siamo a parlare di limite superiore e inferiore (o massimo e minimo) di una funzione in un dato intervallo diremo subito che la differenza fra il limite superiore e il limite inferiore (o fra il massimo e il minimo) dei valori di una funzione $f(x)$ in un dato intervallo si chiama *oscillazione della funzione nell'intervallo stesso:* e osserveremo che se x_1 e x_2 sono due valori di x in questo intervallo, e D è l'oscillazione di $f(x)$ nello stesso intervallo, si avrà in valore assoluto $D \geq f(x_1) - f(x_2)$; e se l'intervallo è quello da a ad $a-\varepsilon$ o quello da $a-\varepsilon$ ad $a+\varepsilon$ e si ha sempre in esso $f(x)-f(a)<\sigma$, sarà evidentemente $D \leq 2\sigma$; e se da a ad $a+\varepsilon$ o da $a-\varepsilon$ ad $a+\varepsilon$ la funzione ammette effettivamente un massimo e un minimo si può anche affermare che sarà $D<2\sigma$.

38. Infine osserveremo che se $f_1(x)$, $f_2(x)$.. $f_n(x)$ sono un numero finito di funzioni di x in un dato intervallo e sono tutte

continue in uno stesso punto a del medesimo intervallo, si vede facilmente che altrettanto accadrà della loro somma algebrica e del loro prodotto, e anche del quoziente di due qualunque fra esse quando però esista un intorno del punto a nel quale la funzione denominatore si mantenga sempre differente da zero per una quantità finita, ec...

E osserveremo poi, una volta per sempre, che le considerazioni che abbiamo esposte per le funzioni reali di una variabile reale si riportano alle funzioni complesse di una variabile reale, considerando in esse separatamente le due funzioni parte reale e coefficiente dell'immaginario, e talvolta anche considerando semplicemente la funzione modulo della funzione stessa.

Funzioni continue in un dato intervallo.

39. Si dicono *continue in un dato intervallo* quelle funzioni che in tutti i punti dell'intervallo stesso (gli estremi inclus.) sono continue; e si dicono *generalmente continue* in un intervallo quelle funzioni che sono discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo stesso, talchè togliendo questi punti, con intervalli piccoli quanto si vuole, negli intervalli restanti esse sono continue.

Così per es: la funzione $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, quando si prenda zero pel valore di essa nel punto $x=0$, è continua in qualunque intervallo; mentre la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, qualunque sia il valore che si prende per essa nel punto $x=0$, è continua soltanto generalmente in quelli intervalli che contengono il punto $x=0$.

40. Noi ci occuperemo ora in modo speciale delle funzioni che sono continue nell'intervallo finito (α, β) che si considera, e incominceremo perciò dall'osservare che se $f(x)$ è una tale funzione, prendendo a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, per ogni valore speciale a di x fra α e β (α e β inclus.) esisterà una speciale quantità differente da zero e positiva ε tale che per tutti i valori di δ numerica-

mente minori di ε pei quali il punto $a+\delta$ cade nell'intervallo che si considera (α, β) (α e β inclus.) (*) si abbia in valore assoluto $f(a+\delta - f(a) < \sigma$. Però per uno stesso valore di σ potrà avvenire che il numero ε che serve per certi punti a non serva più per altri punti dellò stesso intervallo, ma per questi debba essere diminuito; ed anche nasce il dubbio che, come accade quando ci si avvicina indefinitamente ai punti di discontinuità per le funzioni che sono soltanto generalmente continue, anche per le funzioni continue nello stesso intervallo, coll'avvicinarsi di x a certi punti speciali, ε possa impiccolire oltre ogni limite senza però raggiungere mai il valore zero (che sarebbe così soltanto il limite inferiore di tutti i valori ε). In altri termini, si ha così il dubbio che in certi casi non esista un numero ε differente da zero che serva per tutti i valori di x da α a β (α e β inclus.); ed è appunto per questo dubbio che si era da taluno proposto di distinguere la continuità di una funzione che è continua in un certo intervallo (α, β) in continuità *uniforme*, e continuità *non uniforme* secondochè per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esistesse o nò un numero differente da zero e positivo ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε pei quali il punto $x+\delta$ cade nell'intervallo dato (α, β) (α, e β inclus.), e per *tutti* i valori di x nello stesso intervallo (gli estremi ancora inclus.) si avesse in valore assoluto $f(x+\delta) - f(x) < \sigma$. Ora però è stato dimostrato da Cantor che se $f(x)$ è continua nell'intervallo da α a β, per ogni numero σ esiste sempre un tal numero ε che serve per tutti i punti dell'intervallo stesso, e quindi la distinzione surriferita si rende ora del tutto inutile.

(*) A scanso di equivoci facciamo osservare che noi diciamo sempre di limitarci a considerare i valori di δ numericamente minori di ε *pei quali il punto* $a+\delta$ *cade nell'intervallo dato* (α, β) (α e β inclus.), o i punti $a+\delta$ compresi fra $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$ *che cadono nell'intervallo stesso* (α, β) perchè, per punti a sufficientemente vicini agli estremi α e β e in questi estremi, alcuni dei punti $a+\delta$ pei quali δ è numericamente minore di ε usciranno effettivamente dall'intervallo $(\alpha\ \beta)$. Si può osservare infatti che anche se a è sufficientemente vicino ad un estremo per es: ad α, o è in questo estremo, potrà darsi che debba ancora considerarsi un numero fisso e positivo $\varepsilon > a-\alpha$ tale che pei punti $a+\delta$ compresi fra α e $a+\varepsilon$ (α inclus.) si abbia numericamente $f(a+\delta) - f(a) < \sigma$; e allora, alcuni dei punti $a+\delta$ pei quali δ è numericamente minore di ε usciranno effettivamente dall'intervallo (α, β).

41. Questo importante teorema di Cantor si dimostra nel modo seguente:

Consideriamo i valori di x fra α e β (α e β inclus.) e indichiamo con $\varepsilon(\sigma, x)$ un numero ε che pel valore speciale di x che si considera gode della proprietà che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε e pei quali il punto $x+\delta$ cade fra α e β (α e β inclus.) si ha in valore assoluto $f(x+\delta) - f(x) < \sigma$. Per la continuità che noi supponiamo in $f(x)$ questo numero ε esisterà e sarà differente da zero, però esso non sarà bene determinato perchè ogni numero fra 0 e ε potrebbe servire egualmente. Per togliere questa indeterminazione, noi fisseremo di prendere per ε il limite superiore dei valori di ε che rispetto al punto x sono compatibili colle proprietà che devono avere tutte le ε (il qual limite evidentemente esisterà §. 15), e riterremo che $\varepsilon(\sigma, x)$ ci indichi questo valore così determinato di ε pel punto x; e allora questa quantità $\varepsilon(\sigma, x)$ nell'intervallo (α, β) potrà riguardarsi come una funzione di x.

Da ciò segue (§§. 15 e 36) che esisterà un limite inferiore λ' pei valori di $\varepsilon(\sigma, x)$ nell'intervallo stesso (α, β), e esisterà almeno un punto x' fra α e β (α e β inclus.) dotato della proprietà che pei punti di ogni intorno di x' anche arbitrariamente piccolo, il limite inferiore dei valori corrispondenti di $\varepsilon(\sigma, x)$ è ancora λ'. Inoltre, siccome la funzione $f(x)$ è sempre continua, per il punto x' esisterà un numero positivo e differente da zero ε' dotato della proprietà che per tutti i valori di δ' numericamente minori di ε' pei quali il punto $x'+\delta'$ cade nell'intervallo dato si ha in valore assoluto $f(x'+\delta') - f(x') < \frac{\sigma}{2}$, e quindi nell'intervallo $(x'-\varepsilon', x'+\varepsilon')$ (o nella porzione di esso che cade nell'intervallo dato) le variazioni della funzione saranno sempre numericamente minori di σ. Ne segue che per *tutti* i punti x che possono considerarsi nell'intervallo $\left(x'-\frac{\varepsilon'}{2}, x'+\frac{\varepsilon'}{2}\right)$ un valore per ε uguale a $\frac{\varepsilon'}{2}$ soddisfarà alla condizione di darci in valore assoluto $f(x+\delta) - f(x) < \sigma$ per tutte le δ numericamente minori di questo ε e per le quali il punto $x+\delta$ resta nell'intervallo (α, β); quindi per tutti questi punti x la quantità $\varepsilon(\sigma, x)$ definita sopra non potrà essere inferiore a $\frac{\varepsilon'}{2}$, e λ' che

è il limite inferiore dei valori $\varepsilon(\sigma, x)$ per gli stessi valori di x, e anche per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclus.), non potrà essere minore di $\frac{\varepsilon'}{2}$. Questo ci dimostra che per tutti i valori di x compresi nell'intervallo (α, β) (gli estremi incl.), e per tutti i valori di δ numericamente minori di $\frac{\varepsilon'}{2}$ e pei quali il punto $x+\delta$ cade nell'intervallo stesso (α, β) si ha in valore assoluto $f(x+\delta)-f(x)<\sigma$; quindi il teorema resta così dimostrato.

42. Notiamo che dal teorema precedente risulta subito l'altro che: *se una funzione $f(x)$ è continua in tutto un intervallo (α, β), prendendo un numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, si potrà sempre scomporre l'intervallo totale (α, β) in un numero finito di intervalli parziali sufficientemente piccoli, ma tutti di ampiezza differente da zero, tali che le oscillazioni della funzione in ciascuno di essi siano tutte minori di σ*; giacchè se ε è il numero di cui abbiamo mostrato sopra l'esistenza e che serve per un numero σ' inferiore a $\frac{\sigma}{2}$, in ogni intervallo inferiore o uguale a ε le oscillazioni della funzione non saranno mai superiori a $2\sigma'$ (§. 37), e quindi saranno tutte inferiori a σ.

43. Le funzioni continue in un dato intervallo godono anche di altre proprietà che, sebbene si diano spesso come di una evidenza immediata, esigono pur nonostante una dimostrazione speciale quando si voglia fare uno studio rigoroso delle stesse funzioni.

Queste proprietà sono contenute nei seguenti teoremi, dei quali il primo il terzo e il quarto si riferiscono più generalmente anche alle funzioni che sono continue soltanto in un punto.

Teorema I. *Se una funzione $f(x)$ è continua in un punto determinato x', ed è conosciuta in un gruppo di punti dei quali x' è soltanto un punto-limite* (§. 12), *essa sarà determinata anche nel punto x'.*

Infatti, se questo accade, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ sono i punti del gruppo dato disposti in modo che col crescere di n vadano sempre più avvicinandosi ad x', i valori $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots f(\alpha_n), \dots f(\alpha_{m+n}), \dots$ sono conosciuti, ed hanno un limite determinato (§. 22) perchè,

a causa della continuità di $f(x)$, le differenze $f(\alpha_{m+n})-f(\alpha_n)$, qualunque sia il numero positivo m, col crescere indefinito di n, finiscono per divenire e restare poi sempre numericamente minori di qualunque quantità data. Ora se A è questo limite, nel punto x' sarà $f(x')=A$, perchè se potesse essere p: es: $f(x')=B$, con B differente da A, indicando con n' un numero tale che per $n \geq n'$ si avesse in valore assoluto $f(\alpha_n) - A < \frac{B-A}{2}$, si avrebbe numericamente:

$$f(\alpha_n) - f(x') > \frac{B-A}{2}$$ per qualunque valore di n superiore a n',

e quindi $f(x)$ non sarebbe continua nel punto x', perchè non esisterebbe un intervallo $(x' \pm \varepsilon, x')$, o $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ nel quale fosse sempre $f(x) - f(x') < \frac{B-A}{2}$ in valore assoluto. Il teorema è dunque dimostrato.

Da questo teorema si deduce immediatamente come corollario che:

Se una funzione $f(x)$ è continua in un certo intervallo (α, β) *ed è conosciuta nei punti di un gruppo infinito* G, *essa è determinata anche nei punti di tutti i gruppi derivati di* G (§§. 12 e 13).

44. Di quì poi si ha subito il seguente:

Teorema II. *Se una funzione $f(x)$ è continua in un certo intervallo* (α, β) *ed è conosciuta soltanto nei punti di un gruppo* G *di seconda specie di cui il primo gruppo derivato* G' *contiene tutti i punti dell' intervallo, essa sarà determinata anche negli altri punti.*

E così in particolare si può dire che: *se la funzione $f(x)$ ha uno stesso valore* A *in tutti i punti di un gruppo* G *come quello ora considerato, essa sarà uguale ad* A *in tutto l' intervallo; e se una funzione $f(x)$ continua fra α e β è conosciuta in tutti i punti razionali dello stesso intervallo, essa sarà determinata anche nei punti irrazionali;* come anche: *se due funzioni continue nell' intervallo* (α, β) *sono uguali in tutti i punti del gruppo* G *di 2.ª specie ora indicato, esse saranno uguali anche in tutti gli altri punti.*

45. Teorema III. *Se una funzione $f(x)$ è continua in un punto x', e in punti discosti da x' meno di qualunque quantità arbitrariamente piccola data prende il valore* A *o valori che nume-*

ricamente differiscono da A *meno di qualunque quantità data, si avrà* $f(x')=A$, giacchè se fosse p: es: $f(x')=B$, con B differente da A, $f(x)$ nel punto x' non sarebbe continua.

46. Teorema IV. *Se $f(x)$ è continua in un punto x' e coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad x' da una parte di x' finisce per non essere mai maggiore di* A, *mentre coll'avvicinarsi di x ad x' dall'altra parte di x' finisce invece per non essere mai minore di* A, *essa nel punto x' prenderà il valore* A.

È chiaro infatti che se non fosse $f(x') = A$, da una parte di x' la funzione $f(x) - A$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad x' finirebbe per essere sempre positiva o nulla, e dall'altra finirebbe invece per essere sempre negativa o nulla, e in x' non sarebbe zero, e quindi almeno da una parte di x' questa funzione $f(x)-A$ non sarebbe continua, ciò che è contro l'ipotesi.

47. Teorema V. *Una funzione $f(x)$ che in un dato intervallo (α, β) è continua e non è costante, prende sempre effettivamente nello stesso intervallo il valore massimo e il valore minimo;* cioè esiste sempre nell'intervallo dato (gli estremi inclus.) almeno un punto determinato x' nel quale la funzione ha un valore che non è inferiore a nessuno dei valori che essa ha in tutti gli altri punti dello stesso intervallo, ma è invece superiore ad alcuni o a tutti questi valori; e esiste pure nello stesso intervallo almeno un punto determinato x'' nel quale il valore della funzione non è superiore a nessuno dei valori che essa ha in tutti gli altri punti, ma è invece inferiore ad alcuni o a tutti questi valori stessi (Weierstrass.) (*).

Indichiamo infatti con λ il limite superiore dei valori della nostra funzione $f(x)$ nell'intervallo dato da α a β (gli estremi inclus.). Questo limite superiore esisterà, ed esisterà anche (§. 36) almeno un punto x' dotato della proprietà che pei punti di ogni suo intorno, anche arbitrariamente piccolo, il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ; quindi pel teorema III si avrà evidentemente $f(x')=\lambda$, e perciò λ sarà un massimo.

In modo simile si prova l'esistenza del minimo, e perciò il teorema può dirsi completamente dimostrato.

(*) Osserviamo che per le funzioni che non sono sempre continue nell'intervallo dato (α, β) non può darsi che il teorema del §. 36, poichè per esse il massimo e il minimo possono evidentemente *non esistere*.

48. Teorema VI. *Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo (α, β) e in questo intervallo prende anche valori numericamente minori di qualunque quantità data, essa per un valore determinato di x nello stesso intervallo prenderà effettivamente anche il valore zero.*

Per il teorema precedente infatti, la funzione $f^2(x)$, che è pure continua fra α e β (§. 38) ammetterà un minimo che sarà al tempo stesso il limite inferiore dei valori che essa ha fra α e β (α e β inclus.). Ma per le ipotesi fatte nell'enunciato questo limite inferiore è zero, quindi esiste fra α e β (α e β inclus.) un valore determinato di x pel quale $f(x)=0$.

49. Teorema VII. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β e in questo intervallo prende anche valori numericamente vicini quanto si vuole ad una quantità determinata* A, *essa per un valore determinato di x nello stesso intervallo prenderà effettivamente anche il valore* A.

La funzione $f(x)-A$ infatti, nell'intervallo dato, prenderà anche valori numericamente minori di qualunque quantità data, e quindi (teor. prec.) per un certo valore x' di x in questo intervallo (gli estr. inclus.) prenderà anche il valore zero, e si avrà perciò $f(x')=A$.

50. Teorema VIII. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β e per un valore a di x compreso in questo intervallo (α e β inclus.) è positiva, mentre per un valore b di x nello stesso intervallo (α e β pure inclus.) è negativa, per un valore determinato di x fra a e b prenderà il valore zero.*

Supponiamo infatti p: es: $a < b$, e formiamo il gruppo dei valori positivi di $f(x)$ fra a e b (a inclus.) e indichiamo con A il limite inferiore di questi valori. Siccome $f(x)$ è continua fra a e b, pel teorema precedente esisterà fra a e b un punto x' pel quale $f(x')=A$, e perciò per dimostrare il teorema enunciato basterà dimostrare che A deve essere uguale a zero.

Ora, ammettendo che A sia differente da zero, pel teorema del §. 42 si potrà trovare un numero differente da zero e positivo ε, col quale si potrà dividere l'intervallo (a, b) in più intervalli successivi $(a, a+\varepsilon)$, $(a+\varepsilon, a+2\varepsilon)$, $(a+2\varepsilon, a+3\varepsilon)$, ... in ciascuno dei quali le variazioni di $f(x)$ siano minori di A in valore asso-

luto; e poichè ε è differente da zero, il numero di questi intervalli sarà finito, e l'ultimo di essi $(m\,\varepsilon, b)$ potrà anche essere di ampiezza minore di ε. Ora considerando il primo di questi intervalli $(a, a+\varepsilon)$, e osservando che $f(a) \geq A$, si vede subito che in esso la funzione $f(x)$ sarà sempre positiva, e quindi non inferiore ad A, e perciò anche $f(a+\varepsilon)$ sarà positiva e non inferiore ad A. Considerando poi il secondo intervallo $(a+\varepsilon, a+2\varepsilon)$ si conclude subito che anche in esso $f(x)$ è sempre positiva e quindi non inferiore ad A, e $f(a+2\varepsilon) \geq A$; e così continuando si giunge a concludere che, quando A fosse differente da zero, $f(x)$ sarebbe positiva e non mai inferiore ad A in tutto l'intervallo, e in particolare anche $f(b)$ sarebbe positiva e non inferiore ad A, ciò che è contro l'ipotesi. Conviene dunque ammettere che A sia zero, e $f(x')=0$; e poichè, evidentemente il punto x' non può trovarsi nè in a nè in b, il teorema resta così dimostrato.

51. Teorema IX. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β e in due punti a e b di questo intervallo (α, e β inclus.) prende valori differenti* A *e* B, *essa per uno o più valori determinati di x fra a e b prenderà qualunque valore* C *compreso fra* A *e* B.

Considerando infatti la funzione $f(x)-C$, si vede subito che i suoi valori per $x=a$ e $x=b$ sono di segno contrario; e si conclude quindi (teor. prec.) che fra a e b esisterà almeno un valore determinato x' di x pel quale si avrà $f(x')-C=0$, ossia $f(x')=C$.

52. Per questo teorema poi e per quello del §. 47 si ha subito anche il seguente:

Teorema X. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β, in questo intervallo prenderà almeno una volta per un valore determinato della variabile un valore qualunque compreso fra il massimo e il minimo dei valori che essa ha nell'intervallo stesso.*

53. Teorema XI. *Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo (α, β) e in alcuni intorni di uno dei due estremi p: es: di α, è costante e uguale ad* A, *senza essere però costante in tutto l'intervallo (α, β) e si ha p: es: $\alpha<\beta$, esisterà nell'interno dell'intervallo stesso un punto* determinato *x' dotato della proprietà che mentre fra α e x' (x' inclus.) si ha sempre $f(x)=A$, in qualunque intervallo $(x', x'+\varepsilon)$ a destra di x' e coll'estremo inferiore in x' esisteranno sempre dei punti x pei quali non sarà $f(x)=A$.*

Osserviamo infatti che i punti x dell'intervallo (α, β) (β inclus.) possono distinguersi in punti che soddisfano e punti che non soddisfano respettivamente alla condizione che fra α e x (x inclus.) $f(x)$ sia sempre costante e uguale ad A, e quindi esisterà fra α e β (§. 9) un punto determinato x' che eseguirà la scomposizione fra le due classi indicate di punti; e ora è facile vedere che questo punto x' è quello di cui si parla nell' enunciato del teorema.

Si vede subito infatti che per ogni punto x fra α e x', e quindi anche in x' (§. 45), dovrà essere $f(x)$=A, poichè altrimenti x' non eseguirebbe la scomposizione indicata. Lo stesso avverrebbe evidentemente se esistesse un intervallo $(x', x'+\varepsilon)$ a destra di x' e coll' estremo inferiore in x' nel quale si avesse sempre $f(x)$=A; quindi, poichè è chiaro che il punto x' non potrà coincidere nè con α nè con β, il teorema può dirsi dimostrato.

54. Da questo teorema risulta evidentemente che se fra α e β (α e β inclus.) esiste un punto *determinato* x' dotato della proprietà che in un intervallo arbitrariamente piccolo che ha questo punto nel suo interno o anche soltanto in un estremo, la funzione $f(x)$ ha sempre uno stesso valore A, esisterà una porzione *determinata* dell'intervallo (α, β), alla quale apparterrà il punto x', e pei punti della quale si avrà sempre $f(x)$=A, mentre fuori di questa porzione anche per punti vicinissimi ai suoi estremi non sarà sempre $f(x)$ = A; e noi per brevità di locuzione chiameremo una tal porzione un *tratto di invariabilità della funzione,* e diremo *punti di invariabilità* i punti di essa, come in particolare poi diremo *punti limiti di invariabilità* i punti estremi della stessa porzione. E osserveremo che una funzione continua fra α e β e che non sia costante in tutto questo intervallo potrà avere nello stesso intervallo dei tratti di invariabilità, e il numero di questi tratti potrà anche essere infinito (*). E poichè il valore della funzione

(*) Quando il numero dei tratti di invariabilità di una funzione sia infinito, ben s'intende che non potrà costruirsi per essa una curva rappresentativa, e solo col pensiero potremo talvolta riferirci a una curva rappresentativa *con un numero infinito di vertici.* S'intende poi che questa mancanza di una rappresentazione geometrica può presentarsi anche quando la funzione sempre continua in tutto l'intervallo non ha

in un punto qualunque di un tratto di invariabilità è lo stesso di quello che essa ha nei punti estremi, potremo talvolta fare astrazione dai tratti di invariabilità, e limitarci a considerare i punti limiti di invariabilità.

Osserviamo ora che se in un intervallo (α, β) la funzione continua $f(x)$ non è costante e α e β non sono suoi punti di invariabilità, questo intervallo potrà sempre scomporsi in due altri intervalli (α, α_1), (α_1, β) in ciascuno dei quali $f(x)$ non sarà costante. Lo stesso accadrà se uno o tutti e due i punti α e β sono punti di invariabilità della funzione, poichè allora se α' e β' sono i punti limiti di invariabilità corrispondenti ai tratti di invariabilità cui appartengono i punti α e β, essi saranno evidentemente distinti, e basterà prendere per α_1 un punto compreso fra questi punti α' e β'; quindi poichè ciascuno dei due intervalli ottenuti può alla sua volta scomporsi in due altri intervalli nei quali $f(x)$ non è costante, si può dire evidentemente che se $f(x)$ nell'intervallo (α, β) non ha sempre lo stesso valore, questo intervallo potrà scomporsi in un numero grande quanto si vuole di intervalli parziali in ciascuno dei quali $f(x)$ non avrà sempre lo stesso valore.

55. Sulle funzioni che sono continue in tutto un intervallo (α, β) e non hanno sempre lo stesso valore presenteremo ora altre osservazioni che ci condurranno poi ad una classificazione molto importante delle stesse funzioni.

Ricordiamo perciò che, come abbiamo veduto (§. 47), una qualunque $f(x)$ di quelle funzioni ammette sempre nell'intervallo dato (α, β) (gli estremi inclus.) un massimo M e un minimo m fra tutti i valori che essa può prendere nell'intervallo stesso. In questo massimo e minimo però si ha soltanto il più grande e il più piccolo fra tutti i valori che la funzione può prendere fra α e β (α e β inclus.); ma si avranno fra α e β anche altri massimi e minimi se si adottano le definizioni seguenti:

Supponendo che x' non sia un punto di invariabilità della

tratti di invariabilità o ne ha soltanto un numero finito, come p: es: quando la funzione sia tale che per essa non possa pensarsi che una curva rappresentativa costituita dalla porzione di un poligono i cui lati sono in numero infinito e non sono nè perpendicolari nè paralleli all'asse delle x.

funzione nell'intervallo (α, β) (α e β inclus.), si dirà che nel punto x' la funzione è massima o minima quando il valore $f(x')$ che essa prende in quel punto è il massimo o il minimo respettivamente fra tutti i valori che essa prende in ogni intorno sufficientemente piccolo del punto stesso.

E se (x_1, x_2) è un tratto di invariabilità della funzione, si dirà che la funzione è massima o minima in ogni punto x' di questo tratto e anche in tutto il tratto quando il valore che essa ha nel tratto stesso è il massimo o il minimo respettivamente fra i valori che essa prende in ogni intorno sufficientemente piccolo di uno o di tutti e due i punti limiti di invariabilità x_1, x_2 dello stesso tratto secondochè *uno solo o tutti e due* questi punti cadono *nell'interno* dell'intervallo (α, β). Fuori di questi casi in un punto o in un tratto di invariabilità della funzione non si avranno nè massimi nè minimi.

A scanso di equivoci poi chiameremo massimi e minimi *assoluti* della funzione nell'intervallo (α, β) i numeri M e m considerati sopra, e con queste denominazioni sarà da osservare che anche questi massimi e minimi assoluti corrisponderanno sempre respettivamente a massimi e minimi della funzione, sia che i punti corrispondenti a questi valori (§. 47) siano punti di invariabilità della funzione o non lo siano. Inoltre osserveremo che potrà darsi che fra α e β (α e β inclus.) non vi sia che un sol punto o un solo tratto di invariabilità di $f(x)$ nel quale questa funzione abbia un valore massimo e questo allora sarà M, e potrà darsi che non vi sia che un solo punto o un solo tratto nel quale essa abbia un valore minimo e questo sarà m; come potrà darsi anche che fra α e β esistano più punti o più tratti nei quali la funzione è massima o minima, e in questo caso tutti i valori massimi e minimi della funzione saranno compresi fra M e m, o saranno uguali respettivamente a questi numeri, e dei massimi alcuni (differenti da M) potranno anche essere uguali a dei minimi (differenti però da m).

56. E poichè in ogni porzione dell'intervallo (α, β) che non appartiene tutta ad un tratto di invariabilità, esistono sempre (§. 47) dei punti o dei tratti determinati, nei quali la funzione ha

il massimo M e il minimo m dei valori che essa può prendere nella stessa porzione, e si ha $M > m$, si conclude che se fra un massimo e un minimo della funzione (punti o tratti) non si hanno altri massimi o minimi, essi non potranno essere uguali; e se in due punti o tratti non appartenenti allo stesso tratto di invariabilità la funzione avrà due massimi, fra essi dovrà esistere almeno un punto o un tratto determinato nel quale la funzione ha un minimo inferiore ai massimi stessi.

Ne segue che se la funzione avrà massimi e minimi in punti o in tratti *determinati,* percorrendo l'intervallo da α a β, da un punto o da un tratto dove la funzione è massima non si passerà ad un altro punto o ad un tratto ove essa è pur massima senza incontrare almeno un punto o tratto nel quale essa ha un valore minimo inferiore al massimo da cui siamo partiti. Inoltre in tutto l'intervallo fra un massimo e un minimo consecutivi la funzione sarà tale che dividendo in due l'intervallo con un punto qualunque preso in esso, negli intervalli che si otterranno essa avrà sempre il massimo in principio e il minimo in fine, o in altri termini nell'intervallo totale dal massimo al minimo la funzione andrà sempre decrescendo o rimarrà costante soltanto in alcuni tratti, e potrà anche restare costante in un numero infinito di tratti. Viceversa da un minimo a un massimo consecutivi la funzione andrà sempre crescendo o resterà costante in alcuni tratti; e noi ora per indicare questo passaggio da un massimo a un minimo consecutivi o viceversa, diremo che la funzione *fà una oscillazione,* e chiameremo *ampiezza della oscillazione* la differenza fra il massimo e il minimo corrispondenti, riservando però ancora il nome di *oscillazione* di una funzione continua *in un dato intervallo* alla differenza fra il massimo e il minimo dei valori che essa prende in questo intervallo (§. 37).

57. Osserviamo poi che se un punto $x=a$ fra α e β (α e β inclus.) non è un punto di invariabilità, e in esso la funzione $f(x)$ ha un massimo o un minimo, dovrà esistere un intorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$ di questo punto tale che per tutti i punti $a+\delta$ e $a-\delta$ che cadono respettivamente a destra e a sinistra di a nello stesso intorno le differenze $f(a+\delta)-f(a), f(a-\delta)-f(a)$ siano sempre negative

o nulle, o sempre positive o nulle respettivamente, senza però esser sempre nulle nè le une nè le altre. E se il punto $x=a$ appartiene a un tratto di invariabilità e in esso si ha un massimo o un minimo, le differenze precedenti dovranno soddisfare alle stesse condizioni in un intorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$ di questo punto che contenga nel suo *interno* uno o tutti e due i punti limiti di invariabilità, secondochè uno solo o tutti e due questi punti cadranno nell'*interno* dell'intervallo dato (α, β); e se infine per $x=a$ non si avrà nè un massimo nè un minimo, allora non sarà possibile di soddisfare a queste condizioni, e, qualunque siano gli intorni $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$ che si prenderanno, le differenze corrispondenti $f(a+\delta)-f(a), f(a-\delta)-f(a)$, ove saranno differenti da zero, non saranno sempre tutte dello stesso segno.

Prendendo ora a considerare un punto $x=a$, che non appartenga a un tratto di invariabilità, o che tutt'al più sia un punto limite di invariabilità, si può osservare che per quanto piccolo si prenda un numero positivo ε, potrà avvenire che una almeno delle differenze $f(a+\delta)-f(a)$, $f(a-\delta)-f(a)$, considerate pei valori di δ positivi e minori di ε, senza essere sempre zero per tutti questi valori di δ, divenga però sempre uguale a zero per alcuni di questi valori, o cambi continuamente di segno col variare di δ, o anche più generalmente vada ora crescendo ora diminuendo in valore assoluto coll'impiccolire sempre più di δ; in modo cioè che fra 0 e ε (0 escluso), per quanto piccolo sia ε, esistano sempre dei valori δ_1 di δ pei quali il valore assoluto di quella differenza è minore del valore assoluto della stessa differenza per alcuni valori di δ inferiori a δ_1. Allora la funzione $f(x)$ per $x=a$ avrà o non avrà un massimo o un minimo; ma sempre però nell'intorno del punto a, a destra o a sinistra o da ambedue le parti secondochè le dette singolarità si presenteranno per l'una o per l'altra delle due differenze $f(a+\delta)-f(a)$, $f(a-\delta)-f(a)$ o per tutte e due, la funzione stessa avrà un numero infinito di massimi e di minimi (in un numero infinito di punti o di tratti).

Riteniamo infatti che le dette singolarità si presentino p: es: a destra di a, e sia δ_1 uno degli indicati valori di δ; e consideriamo il massimo e il minimo assoluto di $f(x)$ fra a e $a+\delta_1$ (a e

$a+\delta_1$ inclus.). Supponiamo ε già sufficientemente piccolo; si vedrà subito che se $f(a)$ è un massimo di $f(x)$, esisterà sempre *nell'interno* dell'intervallo stesso $(a, a+\delta_1)$ un punto o un tratto determinato cui corrisponderà il minimo assoluto di $f(x)$ fra a e $a+\delta_1$, perchè per certi valori di δ inferiori a δ_1 il valore assoluto della differenza $f(a+\delta)-f(a)$ (che ora è negativa) sarà maggiore del valore assoluto della differenza $f(a+\delta_1)-f(a)$. Similmente si vedrà che, se in a si ha un minimo di $f(x)$, *nell'interno* dello stesso intervallo $(a, a+\delta_1)$ esisterà un punto o un tratto determinato nel quale si ha il massimo assoluto di $f(x)$, e parimenti, se in a non si ha nè un massimo nè un minimo, in un punto o in un tratto determinato nell'interno dello stesso intervallo si avrà ancora il massimo o il minimo assoluto di $f(x)$; talchè in ogni caso, per quanto piccolo sia ε, esisterà sempre un punto o un tratto determinato fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) cui corrisponderà un massimo o un minimo di $f(x)$. Prendendo ora per ε un valore ε_1 minore di ε e tale che fra a e $a+\varepsilon_1$ non sia contenuto il punto o il tratto che ora abbiamo determinato (neppure in parte), si giungerà alle stesse conclusioni per l'intervallo $(a, a+\varepsilon_1)$; e così continuando si vede chiaramente che il numero dei massimi e minimi (punti o tratti) che si avranno in qualunque intervallo $(a, a+\varepsilon)$, per quanto piccolo sia ε, sarà sempre infinito; e volendo, si potrà anche costruire quel numero che più ci piace di punti o tratti corrispondenti agli stessi massimi e minimi.

Viceversa, se si osserva che quando una funzione ha un massimo o un minimo in un punto *interno* di un intervallo (α, β), o in un tratto determinato *tutto* contenuto *nell'interno* di questo intervallo, essa col variare di x da α a β in alcuni tratti deve andare crescendo e in altri decrescendo, si potrà dire evidentemente che quando in ogni intorno di un punto a a destra o a sinistra, o dalle due parti la funzione $f(x)$ ha un numero infinito di massimi o di minimi (punti o tratti), l'una o l'altra delle due differenze $f(a+\delta)-f(a)$, $f\,a-\delta)-f(a)$ o tutte e due presenteranno le singolarità dette sopra.

58. Queste osservazioni conducono a notare l'esistenza di funzioni continue che all'intorno di punti speciali (come p: es: il

punto $x=0$ per la funzione $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$) hanno un numero infinito di massimi e minimi (punti o tratti), o fanno un numero infinito di oscillazioni. In particolare poi ci permettono anche di notare che se una funzione $f(x)$ è continua in un dato intervallo e un estremo di questo intervallo non è un punto di invariabilità, essa nello stesso estremo o sarà massima o minima, o in ogni intorno di esso avrà un numero infinito di massimi e minimi (punti o tratti); e nel caso che la funzione abbia dei tratti di invariabilità, la stessa osservazione potrà farsi pei punti estremi di questi tratti.

59. Inoltre per le stesse osservazioni le funzioni che sono continue in un dato intervallo finito potranno distinguersi in *funzioni che nello stesso intervallo hanno un numero finito di massimi e di minimi* (punti o tratti) *o un numero finito di oscillazioni;* e *funzioni che nello stesso intervallo hanno un numero infinito di massimi e di minimi o di oscillazioni.* E per le prime i massimi e minimi saranno sempre in punti o tratti *determinati* dell'intervallo dato (*), mentre per le seconde potrà avvenire che essi si aggruppino (in numero infinito) negli intorni di un numero finito di punti speciali soltanto, in modo che, tolti questi punti con un numero finito di intervalli piccoli quanto si vuole, negli intervalli restanti la funzione abbia soltanto un numero finito di massimi e minimi (punti o tratti); e potrà anche avvenire che essi si trovino aggruppati negli intorni di un numero infinito di punti dello stesso intervallo, e in modo anche che almeno da certe porzioni dell'intervallo stesso non sia possibile isolare nessun intervallo nel quale cada soltanto un numero finito di massimi e di minimi.

60. In ogni caso però è facile vedere che se una funzione continua in un dato intervallo ha un numero infinito di massimi e minimi, il numero delle oscillazioni (§. 56) la cui ampiezza è maggiore di un dato numero σ piccolo quanto si vuole è sempre

(*) Questi massimi e minimi possono essere determinati successivamente per mezzo delle considerazioni esposte nel §. 9; incominciando cioè dal distinguere i punti x fra α e β in punti che soddisfano rispettivamente e punti che non soddisfano alla condizione che fra α e x la funzione varii sempre in un senso (crescente o decrescente) o resti invariabile, e determinando il punto x' che eseguisce la scomposizione fra le due classi indicate di punti, e poi ripetendo lo stesso per l'intervallo (x', β), ec.

finito, e solo và crescendo indefinitamente coll'impiccolire indefinitamente di σ.

Preso infatti per σ un valore determinato, piccolo quanto si vuole, potremo (§. 42) immaginare decomposto l'intervallo dato (α, β) in un numero finito di intervalli:

$$(\alpha, \alpha+\varepsilon), (\alpha+\varepsilon, \alpha+2\varepsilon), (\alpha+2\varepsilon, \alpha+3\varepsilon) \dots (\alpha+n\varepsilon, b),$$

(l'ultimo dei quali sarà di ampiezza uguale o inferiore ad ε) in ciascuno dei quali le oscillazioni delle funzioni (intese nel senso del §. 37) siano minori di σ; e in ciascuno di questi intervalli la funzione non potrà fare che oscillazioni di ampiezza minore di σ. Ne segue che la funzione non potrà fare oscillazioni di ampiezza maggiore di σ se non compiendole in parte in uno degli intervalli sopra indicati e in parte nei seguenti o nei precedenti; e quindi nel caso più sfavorevole, la funzione farà una prima oscillazione di ampiezza maggiore di σ fra a e $a+2\varepsilon$, una seconda fra $a+\varepsilon$ e $a+3\varepsilon$, una terza fra $a+2\varepsilon$, e $a+4\varepsilon, \dots$, e infine una n^a fra $a+(n-1)\varepsilon$ e b, e si avranno così tutt' al più n oscillazioni maggiori di σ; e questo mostra appunto quanto abbiamo enunciato, perchè n è sempre finito per quanto piccolo si prenda il σ, e solo và crescendo indefinitamente coll'impiccolire indefinito di σ.

61. Infine osserviamo che esempî di funzioni che sono continue in un dato intervallo e hanno un numero infinito di massimi e minimi nell'intorno di un numero finito di punti dello stesso intervallo si riscontrano nelle funzioni semplici $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $\operatorname{sen} n x \pi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} n x \pi}\right)$; poichè di queste la prima presenta le dette singolarità all'intorno del punto $x=0$, e la seconda le presenta all'intorno dei punti $x=\frac{m}{n}$, ove m è un numero intero.

In seguito poi daremo sotto forma analitica anche degli esempî di funzioni che sono continue in tutto un intervallo e che hanno un numero infinito di massimi e di minimi nell'intorno di un numero infinito di punti di una porzione qualunque dello stesso intervallo.

Funzioni infinite volte discontinue.

62. Abbiamo già detto che le funzioni discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) in cui si considerano si chiamano generalmente continue, e il loro studio si riduce in sostanza a quello delle funzioni continue in tutto un intervallo. Ora diremo alcune cose intorno alle funzioni che, essendo discontinue in un numero infinito di punti dell'intervallo dato (α, β), possono distinguersi col nome di funzioni *infinite volte discontinue.* (*).

Queste funzioni possono essere discontinue in qualunque punto di una o di più porzioni dell'intervallo dato (α, β), e possono anche invece in qualunque porzione di questo intervallo ammettere sempre dei punti di continuità; e per questo si dividono in due grandi classi, chiamando:

Funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni che sebbene infinite volte discontinue nell'intervallo dato (α, β), in qualunque porzione di questo intervallo ammettono dei punti di continuità; e

Funzioni totalmente discontinue quelle funzioni che almeno in alcune porzioni dell'intervallo dato (α, β) sono discontinue in tutti i punti.

Appartengono così alla classe delle funzioni punteggiate discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che in tutti i punti $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ove n prende tutti i valori interi da 0 a ∞, ha il valore zero, e negli altri punti ha il valore uno.

2.° La funzione che nell'intervallo da $x=1$ a $x=\frac{1}{2}$ (gli estremi inclus.) ha il valore 1, da $x=\frac{1}{2}$ a $x=\frac{1}{2^2}$ $\left(\frac{1}{2^2}\text{ inclus.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2}$, da $x=\frac{1}{2^2}$ a $x=\frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{1}{2^3}\text{ incl.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^2}$, e in generale da $x=\frac{1}{2^n}$ a $x=\frac{1}{2^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\text{ inclus.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^n}$.

(*) *Hankel* chiama queste funzioni, funzioni *linearmente discontinue.*

3.° La funzione che in un gruppo infinito di punti di prima specie (§§. 12 e 14) fra 0 e 1 è uguale a zero e negli altri punti è uguale a uno.

Appartengono invece alla classe delle funzioni totalmente discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che pei valori razionali di x fra 0 e 1 è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno.

2.° La funzione che fra 0 e 1 ha il valore uno per tutto fuorchè negli intervalli di ampiezza ζ^n che hanno il loro punto di mezzo nei punti $x=\frac{1}{2^n}$, in tutta l'estensione dei quali (gli estremi incl.) è uguale a zero pei valori razionali di x, e uguale a uno pei valori irrazionali; supposto che sia $\zeta<\frac{1}{4}$, in modo da far sì che fra gli estremi successivi $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\zeta^n$, $\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}\zeta^{n-1}$ di due intervalli qualunque consecutivi ζ^{n-1} e ζ^n cada sempre un intervallo $\frac{1}{2^n}\left\{1-(2\zeta)^{n-1}(1+\zeta)\right\}$ nel quale la funzione sia sempre uguale ad uno.

63. Ora quando si abbia riguardo ai salti (§.34) che le funzioni infinite volte discontinue possono fare nei differenti punti dell'intervallo dato (α, β), si vede chiaramente che per le funzioni punteggiate discontinue, in qualunque porzione dello stesso intervallo esisterà sempre un altro intervallo nel quale si avranno salti minori di un numero arbitrariamente piccolo σ. Viceversa se questo accade qualunque sia σ, per una funzione infinite volte discontinua, è facile vedere che essa sarà punteggiata discontinua.

Prendendo infatti un intervallo qualunque (a, b) nell'intervallo dato (α, β), noi potremo trovare in esso un intervallo (a_1, b_1) nel quale i salti della funzione siano minori di un numero arbitrariamente piccolo σ_1, e in questo potremo prendere un altro intervallo (a'_1, b'_1) i cui estremi siano distanti da a_1 e b_1 respettivamente di una quantità determinata, come p. es. siano ad una distanza da a_1 e b_1 uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_1, b_1).

Funzioni infinite volte discontinue.

62. Abbiamo già detto che le funzioni discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) in cui si considerano si chiamano generalmente continue, e il loro studio si riduce in sostanza a quello delle funzioni continue in tutto un intervallo. Ora diremo alcune cose intorno alle funzioni che, essendo discontinue in un numero infinito di punti dell'intervallo dato (α, β), possono distinguersi col nome di funzioni *infinite volte discontinue*. (*).

Queste funzioni possono essere discontinue in qualunque punto di una o di più porzioni dell'intervallo dato (α, β), e possono anche invece in qualunque porzione di questo intervallo ammettere sempre dei punti di continuità; e per questo si dividono in due grandi classi, chiamando:

Funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni che sebbene infinite volte discontinue nell'intervallo dato (α, β), in qualunque porzione di questo intervallo ammettono dei punti di continuità; e

Funzioni totalmente discontinue quelle funzioni che almeno in alcune porzioni dell'intervallo dato (α, β) sono discontinue in tutti i punti.

Appartengono così alla classe delle funzioni punteggiate discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che in tutti i punti $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ove n prende tutti i valori interi da 0 a ∞, ha il valore zero, e negli altri punti ha il valore uno.

2.° La funzione che nell'intervallo da $x=1$ a $x=\frac{1}{2}$ (gli estremi inclus.) ha il valore 1, da $x=\frac{1}{2}$ a $x=\frac{1}{2^2}$ $\left(\frac{1}{2^2}\right.$ inclus.$\left.\right)$ ha il valore $\frac{1}{2}$, da $x=\frac{1}{2^2}$ a $x=\frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{1}{2^3}\right.$ incl.$\left.\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^2}$, e in generale da $x=\frac{1}{2^n}$ a $x=\frac{1}{2^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right.$ inclus.$\left.\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^n}$.

(*) *Hankel* chiama queste funzioni, funzioni *linearmente discontinue*.

3.° La funzione che in un gruppo infinito di punti di prima specie (§§. 12 e 14) fra 0 e 1 è uguale a zero e negli altri punti è uguale a uno.

Appartengono invece alla classe delle funzioni totalmente discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che pei valori razionali di x fra 0 e 1 è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno.

2.° La funzione che fra 0 e 1 ha il valore uno per tutto fuorchè negli intervalli di ampiezza ζ^n che hanno il loro punto di mezzo nei punti $x=\frac{1}{2^n}$, in tutta l'estensione dei quali (gli estremi incl.) è uguale a zero pei valori razionali di x, e uguale a uno pei valori irrazionali; supposto che sia $\zeta<\frac{1}{4}$, in modo da far sì che fra gli estremi successivi $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\zeta^n$, $\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}\zeta^{n-1}$ di due intervalli qualunque consecutivi ζ^{n-1} e ζ^n cada sempre un intervallo $\frac{1}{2^n}\left\{1-(2\zeta)^{n-1}(1+\zeta)\right\}$ nel quale la funzione sia sempre uguale ad uno.

63. Ora quando si abbia riguardo ai salti (§.34) che le funzioni infinite volte discontinue possono fare nei differenti punti dell'intervallo dato (α, β), si vede chiaramente che per le funzioni punteggiate discontinue, in qualunque porzione dello stesso intervallo esisterà sempre un altro intervallo nel quale si avranno salti minori di un numero arbitrariamente piccolo σ. Viceversa se questo accade qualunque sia σ, per una funzione infinite volte discontinua, è facile vedere che essa sarà punteggiata discontinua.

Prendendo infatti un intervallo qualunque (a, b) nell'intervallo dato (α, β), noi potremo trovare in esso un intervallo (a_1, b_1) nel quale i salti della funzione siano minori di un numero arbitrariamente piccolo σ_1, e in questo potremo prendere un altro intervallo (a'_1, b'_1) i cui estremi siano distanti da a_1 e b_1 respettivamente di una quantità determinata, come p. es. siano ad una distanza da a_1 e b_1 uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_1, b_1).

Funzioni infinite volte discontinue.

62. Abbiamo già detto che le funzioni discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) in cui si considerano si chiamano generalmente continue, e il loro studio si riduce in sostanza a quello delle funzioni continue in tutto un intervallo. Ora diremo alcune cose intorno alle funzioni che, essendo discontinue in un numero infinito di punti dell'intervallo dato (α, β), possono distinguersi col nome di funzioni *infinite volte discontinue.* (*).

Queste funzioni possono essere discontinue in qualunque punto di una o di più porzioni dell'intervallo dato (α, β), e possono anche invece in qualunque porzione di questo intervallo ammettere sempre dei punti di continuità; e per questo si dividono in due grandi classi, chiamando:

Funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni che sebbene infinite volte discontinue nell'intervallo dato (α, β), in qualunque porzione di questo intervallo ammettono dei punti di continuità; e

Funzioni totalmente discontinue quelle funzioni che almeno in alcune porzioni dell'intervallo dato (α, β) sono discontinue in tutti i punti.

Appartengono così alla classe delle funzioni punteggiate discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che in tutti i punti $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ove n prende tutti i valori interi da 0 a ∞, ha il valore zero, e negli altri punti ha il valore uno.

2.° La funzione che nell'intervallo da $x=1$ a $x=\frac{1}{2}$ (gli estremi inclus.) ha il valore 1, da $x=\frac{1}{2}$ a $x=\frac{1}{2^2}$ $\left(\frac{1}{2^2}\text{ inclus.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2}$, da $x=\frac{1}{2^2}$ a $x=\frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{1}{2^3}\text{ incl.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^2}$, e in generale da $x=\frac{1}{2^n}$ a $x=\frac{1}{2^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\text{ inclus.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^n}$.

(*) *Hankel* chiama queste funzioni, funzioni *linearmente discontinue.*

3.° La funzione che in un gruppo infinito di punti di prima specie (§§. 12 e 14) fra 0 e 1 è uguale a zero e negli altri punti è uguale a uno.

Appartengono invece alla classe delle funzioni totalmente discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che pei valori razionali di x fra 0 e 1 è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno.

2.° La funzione che fra 0 e 1 ha il valore uno per tutto fuorchè negli intervalli di ampiezza ζ^n che hanno il loro punto di mezzo nei punti $x=\frac{1}{2^n}$, in tutta l'estensione dei quali (gli estremi incl.) è uguale a zero pei valori razionali di x, e uguale a uno pei valori irrazionali; supposto che sia $\zeta<\frac{1}{4}$, in modo da far sì che fra gli estremi successivi $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\zeta^n$, $\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}\zeta^{n-1}$ di due intervalli qualunque consecutivi ζ^{n-1} e ζ^n cada sempre un intervallo $\frac{1}{2^n}\left\{1-(2\zeta)^{n-1}(1+\zeta)\right\}$ nel quale la funzione sia sempre uguale ad uno.

63. Ora quando si abbia riguardo ai salti (§. 34) che le funzioni infinite volte discontinue possono fare nei differenti punti dell'intervallo dato (α, β), si vede chiaramente che per le funzioni punteggiate discontinue, in qualunque porzione dello stesso intervallo esisterà sempre un altro intervallo nel quale si avranno salti minori di un numero arbitrariamente piccolo σ. Viceversa se questo accade qualunque sia σ, per una funzione infinite volte discontinua, è facile vedere che essa sarà punteggiata discontinua.

Prendendo infatti un intervallo qualunque (a, b) nell'intervallo dato (α, β), noi potremo trovare in esso un intervallo (a_1, b_1) nel quale i salti della funzione siano minori di un numero arbitrariamente piccolo σ_1, e in questo potremo prendere un altro intervallo (a'_1, b'_1) i cui estremi siano distanti da a_1 e b_1 respettivamente di una quantità determinata, come p. es. siano ad una distanza da a_1 e b_1 uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_1, b_1).

Funzioni infinite volte discontinue.

62. Abbiamo già detto che le funzioni discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) in cui si considerano si chiamano generalmente continue, e il loro studio si riduce in sostanza a quello delle funzioni continue in tutto un intervallo. Ora diremo alcune cose intorno alle funzioni che, essendo discontinue in un numero infinito di punti dell'intervallo dato (α, β), possono distinguersi col nome di funzioni *infinite volte discontinue.* (*).

Queste funzioni possono essere discontinue in qualunque punto di una o di più porzioni dell'intervallo dato (α, β), e possono anche invece in qualunque porzione di questo intervallo ammettere sempre dei punti di continuità; e per questo si dividono in due grandi classi, chiamando:

Funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni che sebbene infinite volte discontinue nell'intervallo dato (α, β), in qualunque porzione di questo intervallo ammettono dei punti di continuità; e

Funzioni totalmente discontinue quelle funzioni che almeno in alcune porzioni dell'intervallo dato (α, β) sono discontinue in tutti i punti.

Appartengono così alla classe delle funzioni punteggiate discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che in tutti i punti $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ove n prende tutti i valori interi da 0 a ∞, ha il valore zero, e negli altri punti ha il valore uno.

2.° La funzione che nell'intervallo da $x=1$ a $x=\frac{1}{2}$ (gli estremi inclus.) ha il valore 1, da $x=\frac{1}{2}$ a $x=\frac{1}{2^2}$ $\left(\frac{1}{2^2}\text{ inclus.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2}$, da $x=\frac{1}{2^2}$ a $x=\frac{1}{2^3}$ $\left(\frac{1}{2^3}\text{ incl.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^2}$, e in generale da $x=\frac{1}{2^n}$ a $x=\frac{1}{2^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\text{ inclus.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^n}$.

(*) *Hankel* chiama queste funzioni, funzioni *linearmente discontinue.*

3.° La funzione che in un gruppo infinito di punti di prima specie (§§. 12 e 14) fra 0 e 1 è uguale a zero e negli altri punti è uguale a uno.

Appartengono invece alla classe delle funzioni totalmente discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che pei valori razionali di x fra 0 e 1 è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno.

2.° La funzione che fra 0 e 1 ha il valore uno per tutto fuorchè negli intervalli di ampiezza ζ^n che hanno il loro punto di mezzo nei punti $x=\frac{1}{2^n}$, in tutta l'estensione dei quali (gli estremi incl.) è uguale a zero pei valori razionali di x, e uguale a uno pei valori irrazionali; supposto che sia $\zeta<\frac{1}{4}$, in modo da far sì che fra gli estremi successivi $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\zeta^n$, $\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}\zeta^{n-1}$ di due intervalli qualunque consecutivi ζ^{n-1} e ζ^n cada sempre un intervallo $\frac{1}{2^n}\left\{1-(2\zeta)^{n-1}(1+\zeta)\right\}$ nel quale la funzione sia sempre uguale ad uno.

63. Ora quando si abbia riguardo ai salti (§.34) che le funzioni infinite volte discontinue possono fare nei differenti punti dell'intervallo dato (α, β), si vede chiaramente che per le funzioni punteggiate discontinue, in qualunque porzione dello stesso intervallo esisterà sempre un altro intervallo nel quale si avranno salti minori di un numero arbitrariamente piccolo σ. Viceversa se questo accade qualunque sia σ, per una funzione infinite volte discontinua, è facile vedere che essa sarà punteggiata discontinua.

Prendendo infatti un intervallo qualunque (a, b) nell'intervallo dato (α, β), noi potremo trovare in esso un intervallo (a_1, b_1) nel quale i salti della funzione siano minori di un numero arbitrariamente piccolo σ_1, e in questo potremo prendere un altro intervallo (a'_1, b'_1) i cui estremi siano distanti da a_1 e b_1 respettivamente di una quantità determinata, come p. es. siano ad una distanza da a_1 e b_1 uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_1, b_1).

Nell'intervallo (a'_1, b'_1) i salti della funzione saranno minori di σ_1, e in esso potremo trovare un altro intervallo (a_2, b_2) nel quale i salti della funzione siano minori di $\frac{1}{2}\sigma_1$; e poi in questo intervallo (a_2, b_2) potremo prenderne un altro (a'_2, b'_2), come si è fatto nel caso precedente, i cui estremi a'_2, b'_2 siano discosti da a_2, b_2 respettivamente di una quantità uguale alla quarta parte dell'intervallo stesso (a_2, b_2). Similmente poi nell'intervallo (a'_2, b'_2) potremo trovare un altro intervallo (a_3, b_3) nel quale i salti della funzione siano minori di $\frac{1}{2^2}\sigma_1 \dots$; e così seguitando formeremo una serie di intervalli (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), $(a'_3, b'_3), \dots (a'_n, b'_n) \dots$ nei quali i salti della funzione saranno successivamente minori di σ_1, $\frac{1}{2}\sigma_1$, $\frac{1}{2^2}\sigma_1, \dots \frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1, \dots$ e uno qualunque di questi sarà tutto compreso negli intervalli precedenti e sarà anche *tutto interno* ad altri intervalli (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n) \dots$ nei quali si hanno pure salti minori di σ_1, $\frac{1}{2}\sigma_1$, $\frac{1}{2^2}\sigma_1, \dots \frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1, \dots$ respettivamente. Ora poichè tutti questi intervalli vanno evidentemente impiccolendo oltre ogni limite col crescere indefinito di n, s'intende subito che gli estremi inferiori $a'_1, a'_2, a'_3, \dots a'_n, \dots$ e gli estremi superiori $b'_1, b'_2, b'_3 \dots b'_n, \dots$ dei primi intervalli costituiscono due classi determinate di numeri come quelle del §. 6 alle quali corrisponde un punto determinato α'; e ci è facile di vedere che in questo punto limite α' la nostra funzione $f(x)$ è sempre continua.

Si osservi infatti che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esiste sempre un numero n pel quale si ha $\frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1 < \sigma$, e quindi esisterà un intervallo (a'_n, b'_n) che sarà *tutto situato nell'interno* di un altro intervallo (a_n, b_n) in ogni punto del quale i salti della funzione saranno minori di σ. Ora il punto α' può considerarsi come appartenente all'intervallo (a'_n, b'_n), e perciò *interno* all'intervallo (a_n, b_n); quindi esisterà un intorno $(\alpha'-\varepsilon_1, \alpha'+\varepsilon')$ di questo punto tale che per tutti i punti x di esso la differenza

$f(x) - f(\alpha')$ sia numericamente minore di σ; e perciò $f(x)$ nel punto α' sarà continua, e così nell'intervallo (α, β) sarà una funzione punteggiata discontinua, come appunto avevamo enunciato. (*).

64. Da ciò risulta che le funzioni punteggiate discontinue saranno le funzioni per le quali in qualunque porzione dell'intervallo in cui si considerano esiste sempre un altro intervallo nel quale i salti sono minori di un numero arbitrariamente piccolo σ; e le funzioni totalmente discontinue saranno invece le funzioni tali che, almeno per alcune porzioni dell'intervallo dato, in ogni intervallo piccolo quanto si vuole preso nelle stesse porzioni fanno salti maggiori di un certo numero sufficientemente piccolo ma determinato σ.

65. Di qui segue che per le funzioni totalmente discontinue il numero dei punti dell'intervallo dato nei quali si hanno salti maggiori di un numero sufficientemente piccolo σ sarà sempre infinito; mentre per le funzioni punteggiate discontinue, e per queste soltanto, potrà anche avvenire (come avviene p: es: per la seconda delle funzioni del §. 62) che questo numero sia sempre finito, qualunque sia σ, e vada soltanto crescendo indefinitamente coll'impiccolire indefinitamente di σ.

66. Per questa osservazione poi si può anche notare che appartengono sempre alla classe delle funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni infinite volte discontinue che nell'intervallo dato hanno soltanto un numero finito di oscillazioni (intendendo con ciò di parlare delle funzioni tali che per esse l'intervallo dato può decomporsi in un numero finito di intervalli successivi nei quali la funzione stessa non è mai decrescente o non è mai crescente). Per queste funzioni infatti, in ciascuno degl'intervalli nei quali si ha una oscillazione, e quindi anche in tutto l'intervallo (α, β), i salti maggiori di un numero arbitrariamente piccolo σ dovranno

(*) Si può osservare che gli intervalli successivi (a_n', b_n'), invece di dedurli come abbiamo fatto noi dagli altri intervalli (a_n, b_n) col prendere i punti a'_n, b'_n discosti da a_n e b_n respettivamente di una quantità uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_n, b_n), si potrebbero ottenere con altri processi coi quali l'intervallo (a_n', b_n') che si ha via via da dedurre dall'altro (a_n, b_n) non venisse così fortemente impiccolito; e allora invece di giungere ad un solo punto limite α' nel quale $f(x)$ è continua si potrebbe giungere talvolta anche ad un tratto-limite in tutti i punti del quale $f(x)$ è pure sempre continua.

essere soltanto in un numero finito di punti, perchè altrimenti avvenendo essi sempre in un senso, la funzione dovrebbe divenire infinita; quindi le funzioni stesse non potranno essere che funzioni punteggiate discontinue.

Derivata di una funzione.

67. Sia $f(x)$ una funzione che in un punto x dell'intervallo (α, β) in cui si considera è finita e continua. Se x è un punto *interno* a questo intervallo (α, β) si chiama derivata di questa funzione nello stesso punto x il limite del rapporto $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ per δ tendente a zero tanto per valori positivi quanto per valori negativi, nell'ipotesi che questo limite sia determinato finito e indipendente dal segno di δ. Quando poi questo limite sia infinito (essendo determinato o no di segno) si usa ancora talvolta di considerarlo, dicendo però allora espressamente che la derivata di $f(x)$ nel punto corrispondente x è infinita; ma fuori di questi casi conviene dire che la derivata della funzione $f(x)$ nel punto x non esiste o è indeterminata.

68. Nel caso però che il limite stesso di $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ per $\delta=0$ sia determinato (finito o infinito) soltanto da una parte (destra o sinistra del punto x), o abbia valori determinati ma differenti dall'una e dall'altra parte, si usa ancora qualche volta di considerarlo dalla parte ove è determinato; ma allora si ha cura di distinguere il limite a destra da quello a sinistra, chiamando cioè: *derivata della funzione* $f(x)$ *a destra di* x il limite di $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ per δ tendente a zero per valori positivi o per $\delta=+0$, e chiamando *derivata della funzione a sinistra di* x il limite della quantità stessa per $\delta=-0$; e così, ammessa questa distinzione, nel caso particolare che il punto x sia un estremo dell'intervallo (α, β) (non potendo allora il limite precedente considerarsi che da una parte dell'estremo stesso) la derivata che si avrà in quel punto sarà soltanto una derivata a destra o una derivata a sinistra dell'estremo considerato.

In ciò che segue però, se non si tratti di un estremo dell'intervallo, o non sia detto espressamente di considerare derivate a destra o derivate a sinistra, parlando di derivate in un punto intenderemo sempre parlare delle derivate intese nel senso ordinario indicato nel paragrafo precedente; e così fuori dei casi contemplati nel paragrafo stesso la derivata di una funzione in un punto sarà considerata come non esistente affatto.

69. Per le funzioni continue in tutto un intervallo, la esistenza almeno in generale (*) di una derivata finita per tutti i punti dell'intervallo stesso fu ammessa quasi fino agli ultimi tempi, senza dare luogo a veruna obiezione, ritenendola come sufficientemente dimostrata da poche considerazioni geometriche che si facevano sulle tangenti alle curve. Fu soltanto Ampère nel 1806 il primo che tentò di dimostrare analiticamente l'esistenza di questa derivata; ma la dimostrazione che egli tentò di darne, oltre che sarebbe limitata alle funzioni che nell'intervallo finito in cui si considerano presentano soltanto un numero finito di oscillazioni, non può dirsi neppure per questo caso speciale una dimostrazione della esistenza della derivata, sia perchè essa si limiterebbe tutt' al più a mostrare che la derivata di una tale funzione in tutto un intervallo, quando questa funzione non è costante, non può essere sempre zero o sempre infinita, e resterebbe così lasciato da parte il caso della indeterminazione, sia perchè, quando si esamini attentamente, si riscontra che da essa non possono trarsi rigorosamente neppure queste conclusioni.

I ragionamenti di Ampère infatti permettono solo di concludere che se avvenisse che la derivata di una funzione che in tutto un intervallo è continua e non è mai crescente o non è mai decrescente fosse sempre zero o sempre infinita, la funzione stessa sarebbe una costante o sarebbe infinita, o per ogni valore di σ, arbitrariamente piccolo nel primo caso, e arbitrariamente grande nel secondo, non esisterebbe un numero positivo e diffe-

(*) Notiamo esplicitamente che ora e in seguito quando si dirà che una funzione in un dato intervallo soddisfa a certe condizioni o ha certe date proprietà soltanto *in generale* o *generalmente*, s'intenderà dire che eccettuato soltanto un numero *finito* di punti isolati dello stesso intervallo in tutti gli altri soddisfa a quelle date condizioni o ha quelle date proprietà.

rente da zero ε tale che per tutti i valori di δ numericamente inferiori ad ε e per *tutti i valori* di x nell'intervallo stesso si avesse sempre respettivamente in valore assoluto:

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}<\sigma, \quad \text{o:} \quad \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}>\sigma;$$

e questo è lungi dal porre in evidenza una contradizione, e non ci dà affatto le conclusioni di cui sopra parlammo.

Dopo il tentativo fatto da Ampère per dimostrare la esistenza di questa derivata, non ostante che altre questioni abbiano fatta vieppiù sentire la necessità di una tale dimostrazione, o almeno della determinazione delle condizioni di continuità della funzione sotto le quali la stessa derivata esiste, nessun altra dimostrazione è stata data che in sostanza non presenti tutti o alcuni degli inconvenienti che si riscontrano in quella di Ampère; e in alcuni trattati di Calcolo si è anche continuato a valersi per questa dimostrazione delle solite considerazioni geometriche intorno alle tangenti della curva rappresentativa di $f(x)$. Ma esistendo anche delle funzioni continue (§. 54, nota) per le quali neppure si riesce a concepire una rappresentazione geometrica, ben s'intende quanto queste dimostrazioni manchino di rigore; e può dirsi perciò che con tali dimostrazioni l'esistenza, anche soltanto in generale, di una derivata per le funzioni che sono continue in tutto un intervallo è tutt' altro che posta fuor di dubbio.

Ma anzi, si conoscono ora anche alcune funzioni che, sebbene siano continue in tutto un intervallo dato e non presentino oscillazioni, pur nonostante hanno la derivata infinita in un numero infinito di punti di qualunque porzione dello stesso intervallo, o l'hanno indeterminata; e altre anche se ne conoscono che sebbene finite e continue in qualunque intervallo non ammettono mai una derivata finita e determinata; quindi si può ritenere ormai posto fuor di dubbio che mentre la condizione della continuità in tutto un intervallo è condizione necessaria per l'esistenza della derivata in ogni punto dello stesso intervallo, essa non è però (come ordinariamente si era ammesso fin qui) condizione sufficiente per

l'esistenza, neppure soltanto in generale, della derivata in tutto l'intervallo; e onde questa derivata esista, anche soltanto in generale, non basta che si abbia la continuità quale ordinariamente si definisce, ma oltre a questa continuità bisogna che siano soddisfatte altre condizioni che ancora non si conoscono, o si abbia per così dire una continuità speciale più restrittiva di quella che noi abbiamo definita.

70. Daremo ora alcuni teoremi sulle funzioni derivate, i quali non dimostrano già la esistenza della derivata delle funzioni continue (ciò che non può farsi), nè danno le condizioni necessarie e sufficienti per questa esistenza, ma hanno però molta importanza perchè servono a stabilire rigorosamente alcune proprietà della teoria generale delle funzioni.

Teorema I. *La derivata di una funzione che in tutto un intervallo ha sempre uno stesso valore finito è zero in tutto l'intervallo.*

Questo teorema risulta subito dalla definizione della derivata.

71. Teorema II. Se $f(x)$ *è una funzione che in tutto un intervallo* (α, β) (α *e* β *inclus.*) *è finita e continua, e per tutti i punti* x *fra* α *e* β (α e β al più esclusi) *ammette una derivata che è finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, questa derivata in una porzione qualunque dello stesso intervallo:*

1.° *Non potrà avere sempre un valore infinito.*

2.° *Non potrà avere sempre il valore zero, a meno che non sia costante in tutta la porzione che si considera dello stesso intervallo.*

3.° *Non potrà avere soltanto valori zero e valori infiniti.*

Consideriamo infatti una porzione qualunque (a, b) dell'intervallo dato (gli estremi inclusi o nò), e formiamo la funzione:

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b) - f(a)\}$$

che si annulla per $x=a$ e $x=b$.

Questa funzione $\psi(x)$ evidentemente sarà finita e continua come la $f(x)$ in tutto l'intervallo (a, b), e la sua derivata, che indicheremo con $\psi'(x)$, sarà sempre finita e determinata, o infinita e determinata di segno, insieme alla derivata di $f(x)$.

Ora siccome questa funzione $\psi(x)$ si annulla per $x=a$ e $x=b$, ed è sempre continua, se essa non sarà zero in tutto l'intervallo (a, b), esisterà necessariamente (§. 47) almeno un punto determinato x' nell'*interno* dell'intervallo stesso nel quale essa prenderà effettivamente il valore massimo o il valore minimo; quindi, tanto che $\psi(x)$ sia sempre zero fra a e b quanto che non lo sia, esisterà sempre almeno un punto determinato x', nell'*interno* dell'intervallo (a, b), pel quale si potrà trovare un numero differente da zero e positivo ε tale che per tutti i valori di δ positivi e minori di ε le differenze:

$$\psi(x'+\delta)-\psi(x'), \qquad \psi(x'-\delta)-\psi(x'),$$

ove non sono nulle, abbiano sempre uno stesso segno determinato per tutti valori di δ; e perciò i rapporti:

$$\frac{\psi(x'+\delta)-\psi(x')}{\delta}, \qquad \frac{\psi(x'-\delta)-\psi(x')}{-\delta},$$

dove non saranno nulli, avranno ciascuno uno stesso segno per tutti i valori di δ, e il segno dell'uno sarà opposto a quello dell'altro; talchè i loro limiti, per $\delta=0$, se esistono, dovranno essere nulli o di segno contrario.

Ma questi limiti esistono, e devono avere *uno stesso* valore $\psi'(x')$ finito e determinato, o infinito e determinato di segno, perchè, per le ipotesi fatte, $f(x)$ e quindi anche $\psi(x)$ in ogni punto *interno* fra a e b e quindi anche nel punto x' ammettono una derivata che è finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno; quindi si può dire intanto evidentemente che la derivata di $\psi(x)$ e così anche quella di $f(x)$ non potrà essere infinita per $x=x'$, e perciò non potrà essere infinita in tutti i punti dell'intervallo (a, b); e questo dimostra intanto la prima parte del teorema.

Ora, non potendo la derivata di $\psi(x)$ nel punto x' essere infinita, e per le ipotesi fatte dovendo anche essere determinata, si vede chiaramente che il resultato precedente potrà solo sussistere quando si abbia $\lim \frac{\psi(x'\pm\delta)-\psi(x')}{\pm\delta}=0$, e allora sarà:

$$(1) \qquad f'(x') = \frac{f(b) - f(a)}{b-a};$$

quindi si può dire intanto che se fra a e b (a e b al più esclusi) $f(x)$ ha una derivata sempre finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, esisterà sempre *entro* l'intervallo (a, b) un punto determinato x' nel quale $f'(x)$ ha un valore finito, e pel quale si ha la formola precedente.

Inoltre, supponendo ora che $f(x)$ fra a e b non abbia sempre lo stesso valore, si vede subito che se $f(a)$ e $f(b)$ sono differenti fra loro, il valore $f'(x')$ di $f'(x)$ nel punto x' sarà diverso da zero, e se sarà $f(a) = f(b)$ potremo sempre prendere fra a e b due altri punti a' e b' pei quali non sia $f(a') = f(b')$, e allora nel punto x' corrispondente al nuovo intervallo (a', b') la $f'(x')$ sarà pure differente da zero; quindi, se $f(x)$ non è costante fra a e b, esisterà sempre un punto determinato x' nel quale $f'(x)$ è finita e differente da zero; e questo dimostra evidentemente le due ultime parti del teorema, talchè esso resta ora completamente dimostrato.

Osserviamo che questo teorema nelle sue due prime parti costituisce quello che propriamente si era proposto Ampère di dimostrare per le funzioni che hanno soltanto un numero finito di oscillazioni nell' intervallo che si considera, perchè effettivamente a Ampère erano sfuggiti i casi di indeterminazione che possono presentarsi nella derivata; ma, come è bene evidente, questo teorema non dimostra l'esistenza della derivata neppure limitatamente alle funzioni che hanno un numero finito di oscillazioni, poichè in esso si suppone esplicitamente questa esistenza.

72. Il teorema dimostrato dà luogo anche alle osservazioni seguenti:

1.° Siccome ogni intervallo (a, b) nel quale $f(x)$ è finita e continua e non è costante può sempre scomporsi (§. 54) in un numero grande quanto si vuole di intervalli parziali in ciascuno dei quali $f(x)$ ha ancora la stessa proprietà, applicando il teorema precedente, si vede subito che se $f(x)$ nello stesso intervallo (a, b) (a e b al più escl.) ha una derivata $f'(x)$ che è sempre finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, in cia-

scuno degli stessi intervalli parziali in cui si può scomporre l'intervallo totale dovrà esistere almeno un punto x' nel quale $f'(x)$ sarà finita e differente da zero, e si può perciò affermare che: *Se in un dato intervallo una funzione $f(x)$ è finita e continua e non è costante, e in tutti i punti dell'intervallo tranne tutto al più negli estremi ammette una derivata che è sempre finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, in ogni porzione di questo intervallo esisteranno sempre infiniti punti nei quali la stessa derivata è finita e differente da zero;* senza però escludere con questo la possibilità che in altri punti (anche in numero infinito) nella stessa porzione la stessa derivata sia zero, e in altri sia infinita.

2.° Similmente spezzando l'intervallo totale in più intervalli parziali e applicando il teorema precedente si vede subito che: *Se $f(x)$ oltre esser finita e continua ammette una derivata in tutto l'intervallo come nel caso precedente, i punti nei quali questa derivata* non *sarà infinita, in* qualunque *porzione dell'intervallo stesso, costituiranno necessariamente un gruppo di punti di 2.ª specie,* (§. 14); *e lo stesso accadrà evidentemente anche dei punti nei quali essa è differente da zero tutte le volte che nell'intervallo dato la funzione non abbia tratti di invariabilità.*

3.° In generale poi, riassumendo, si può dire che: *Se una funzione $f(x)$ è finita e continua in un dato intervallo, in ogni porzione di questo intervallo nella quale essa non è costante la sua derivata non potrà essere sempre zero o sempre infinita e determinata di segno; ma in un numero* infinito *di punti della stessa porzione* (se non in tutti) *dovrà o essere finita e differente da zero, o essere infinita* e non *determinata di segno, o essere pienamente indeterminata.*

Si può poi notare che, quando $f(x)$ è una funzione finita e continua in tutto un intervallo, la differenza $f(x+\delta)-f(x)$ per l'impiccolire sempre più di δ non può cangiare segno che annullandosi, e quindi, per la definizione dei limiti infiniti (§. 17), i punti x' (se esistono) nei quali la derivata di questa funzione è infinita e non determinata di segno non potranno essere punti pei quali $f(x'+\delta)-f(x')$ passi dal positivo al negativo o viceversa finchè col variare di δ si resta soltanto da una stessa parte (destra o

sinistra) del punto x', perchè altrimenti nel punto x' là derivata di $f(x)$ sarebbe zero o assolutamente indeterminata. Ne segue che i punti x' ove la derivata della funzione $f(x)$ è infinita e non determinata di segno saranno soltanto i punti *interni* all'intervallo nei quali la derivata *a destra* è infinita e determinata di segno e la derivata *a sinistra* è pure infinita e di segno opposto, e in essi la funzione avrà un massimo o un minimo; talchè se una funzione $f(x)$ in tutta la porzione che si considera dell'intervallo dato è continua e non fà oscillazioni (cioè non è mai crescente o non è mai decrescente), la sua derivata mentre potrà in alcuni punti (anche in numero infinito) della stessa porzione essere indeterminata, non potrà mai però essere infinita e indeterminata di segno.

E si può notare in conseguenza che per una funzione finita e continua le derivate a destra o a sinistra di un punto a potranno presentare soltanto i tre casi seguenti: 1.° di essere finite e determinate: 2.° di essere infinite e determinate di segno: 3.° di essere tutt'affatto indeterminate.

4.° È facile poi di vedere che la seconda parte del teorema del paragrafo precedente può anche generalizzarsi col dire che: *Se in un dato intervallo una funzione $f(x)$ è finita e continua, e eccettuati tutt'al più i punti di un gruppo* G *di prima specie* (§. 12) *pei quali è incerto, in tutti gli altri ha sempre la derivata uguale a zero, essa nello stesso intervallo avrà sempre uno stesso valore.*

Supponiamo infatti dapprima che il gruppo G di punti da escludersi sia di ordine zero, cioè questi punti siano in numero finito, e escludiamoli con intervalli piccoli quanto si vuole $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$. In ciascuno degli intervalli restanti i_s la funzione $f(x)$ avrà la derivata sempre zero, e perciò in essi si avrà $f(x)=c_s$ essendo c_s una costante; e poichè la funzione $f(x)$ deve essere continua anche nei punti esclusi, e gli intervalli $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$ che escludono questi punti possono supporsi piccoli quanto si vuole, si vede subito (§. 45) che le costanti c_s devono essere tutte eguali, e quindi in tutto l'intervallo si avrà $f(x)=c$, essendo c una costante.

Lo stesso risultato si ottiene se il gruppo G dei punti da escludersi è del prim'ordine (§. 12), giacchè allora esclusi con intervalli piccoli quanto si vuole $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ i punti del gruppo

derivato G′ che, come è noto, sono determinati e in numero finito, in ciascuno degli intervalli restanti i_s non potranno cadere che un numero finito di punti del gruppo G, e quindi in ciascuno di questi intervalli i_s si avrà $f(x)=c_s$, essendo c_s una costante; e poichè nei punti di G′ che abbiamo esclusi $f(x)$ è continua, e gli intervalli che escludono questi punti possono supporsi già presi piccoli quanto si vuole, si concluderà come precedentemente che le costanti c_s sono tutte eguali e che per conseguenza si ha $f(x)=c$ in tutto l' intervallo.

Supponendo ora che la proprietà in discorso sia stata dimostrata pel caso che il gruppo G sia di ordine $(\nu-1)^o$ o sia di ordine inferiore, si vede subito che essa sussiste anche quando questo gruppo è di ordine ν^o. Escludendo infatti con intervalli piccoli quanto si vuole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ i punti del gruppo $G^{(\nu)}$ derivato ν^o di G (che, come è noto, sono determinati e in numero finito), negli intervalli restanti i_s cadranno soltanto punti di G che potranno considerarsi come appartenenti a gruppi di punti di ordine $(\nu-1)^o$ al più, e quindi in ciascuno i_s di questi intervalli si avrà $f(x)=c_s$, essendo al solito c_s una costante; e a causa della continuità di $f(x)$ nei punti che abbiamo esclusi di $G^{(\nu)}$ si concluderà come precedentemente che in tutto l'intervallo si ha $f(x)=c$ essendo c una costante; e così evidentemente il teorema resta dimostrato in tutti i casi.

È da notare che, mentre a priori si può anche essere incerti sulla esistenza o sul valore della derivata di $f(x)$ nei punti del gruppo G, per il teorema dimostrato, si può dire ora che, quando $f(x)$ soddisfa alle condizioni contenute nel teorema stesso, la sua derivata sarà zero anche nei punti del gruppo G.

5.° L'ultima osservazione poi ci permette anche di dire evidentemente che: *Se in un dato intervallo due funzioni* $f(x)$ *e* $F(x)$ *sono sempre finite e continue, e eccettuati tutt'al più un gruppo* G *di punti di prima specie pei quali è incerto, in tutti gli altri ammettono una stessa derivata finita e determinata, o sono tali che le indeterminazioni che presentano queste derivate sono le stesse per tutte e due* (per modo cioè che la differenza delle due funzioni abbia per derivata zero), *allora queste funzioni nello stesso inter-*

vallo non potranno differire l'una dall'altra che per una quantità costante.

E s'intende che l'incertezza che si ha pei punti del gruppo G può essere relativa alla esistenza della derivata di una o di tutte e due le funzioni $f(x)$ e $F(x)$, e può anche esser relativa all'uguaglianza dei valori di queste derivate quando si sappia che esse esistono e sono finite, o all'essere l'una o l'altra infinite e determinate o no di segno. A meno poi che non si sappia in qualche modo che anche pei punti di G le derivate di $f(x)$ e di $F(x)$ esistono almeno per una delle due funzioni (e che quindi l'incertezza sia soltanto relativa alla eguaglianza dei loro valori o all'esistenza della derivata di una sola delle due funzioni), s'intende anche che il teorema enunciato ora lascia ancora incerti sulla esistenza o sulla natura delle stesse derivate negli stessi punti.

6.° Osserveremo ancora che la formula (1) ci mostra che: *Se la funzione $f(x)$ è finita e continua in tutto l'intervallo, e* eccettuati tutto al più gli estremi di questo intervallo, *in tutti gli altri punti ha sempre una derivata che è finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, indicando con x e $x+h$ (h positivo o negativo) due punti qualunque di questo intervallo (gli estremi inclus.), e con θ un numero compreso fra* 0 *e* 1 (0 e 1 escl.) *che dipende da x e da h, si avrà sempre:*

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x+\theta h).$$

7.° Più generalmente poi si può dire che: *Se una funzione $f(x)$ è finita e continua in tutto un intervallo, e eccettuati soltanto un numero finito di punti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nei quali è incerto, in tutti gli altri essa ha una derivata determinata che non può superare un numero finito, e pei punti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i rapporti:*

$$\frac{f(a_1+\delta)-f(a_1)}{\delta}, \quad \frac{f(a_2+\delta)-f(a_2)}{\delta}, \ldots$$

coll'impiccolire numericamente di δ se non tendono verso limiti finiti e determinati oscillano però soltanto fra numeri finiti (§. 24), *allora indicando con x e $x+h$ due punti qualunque dello stesso intervallo, si avrà:*

$$f(x+h) - f(x) = h\,A,$$

ove A *è una quantità che dipende da x e da h ma che in valore assoluto non può mai superare un dato numero finito e positivo.*

Osserviamo infatti che, se fra x e $x+h$ (x e $x+h$ al più escl.) $f(x)$ ha sempre una derivata questo teorema risulta subito dalla osservazione precedente, talchè basta ora considerare il caso in cui nell'*interno* dell'intervallo da x a $x+h$ cadono uno o più punti $a_1, a_2, a_3 \dots$

Ora, in questo caso, per le ipotesi fatte, esisterà un numero positivo e differente da zero δ_1 tale che per δ numericamente inferiore a δ_1 e per $\delta = \pm\,\delta_1$ i rapporti $\frac{f(a_1+\delta)-f(a_1)}{\delta}$, $\frac{f(a_2+\delta)-f(a_2)}{\delta} \dots$ siano *tutti* numericamente minori di una quantità finita g, mentre per δ numericamente maggiore di δ_1 gli stessi rapporti saranno invece tutti inferiori in valore assoluto a $\frac{2g'}{\delta_1}$ essendo g' il massimo valore assoluto di $f(x)$ nell'intervallo dato; quindi indicando con A$'$ la maggiore delle quantità g e $\frac{2g'}{\delta_1}$, e supponendo che nell'interno dell'intervallo da x a $x+h$ cada almeno uno dei punti $a_1, a_2, a_3, \dots$ p: es: il punto a_1, in modo che si possa porre $x=a_1\mp\delta$, $x+h=a_1\pm\delta'$, ove δ e δ' sono positive, si avrà in valore assoluto:

$$f(a_1\pm\delta')-f(a_1)<\delta' \mathrm{A}', \quad f(a_1\mp\delta)-f(a_1)<\delta \mathrm{A}',$$

e quindi anche, in valore assoluto:

$$f(a_1\pm\delta')-f(a_1\mp\delta)<(\delta+\delta')\,\mathrm{A}',$$

e perciò sarà:

$$f(x+h)-f(x)=hh_1\mathrm{A}',$$

essendo h_1 una quantità numericamente inferiore a uno; e questo evidentemente dimostra il teorema.

8.° Dalla osservazione 6.ª poi, come anche dai ragionamenti del §. 71, si deduce in particolare che: *Se nell'intervallo* (α, β) *la funzione* $f(x)$ *è sempre finita e continua e, eccettuati tutto al più*

gli estremi dell'intervallo, in tutti gli altri punti ammette una derivata che è finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, e se inoltre nei punti estremi a e b la funzione stessa $f(x)$ prende uno stesso valore, esisterà sempre nell' interno *dell'intervallo* (a, b) *almeno un punto determinato* x' *nel quale si avrà:* $f'(x')=0$.

9.° Generalizzando poi l'osservazione 6.ª si trova anche che: *Se* $f(x)$ *è una funzione finita e continua in tutto un intervallo* (x_0, x_0+h) *in tutti i punti del quale, tranne tutt' al più gli estremi, ammette anche una derivata che è finita e determinata o che se è infinita è determinata di segno, e se inoltre* $F(x)$ *è un altra funzione che nello stesso intervallo è anch'essa finita e continua e in ogni punto differente dagli estremi* x_0 *e* x_0+h *ammette una derivata che è finita e differente da zero, mentre in questi estremi può anche non avere derivata o averla uguale a zero o infinita, si avrà:*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)},$$

essendo θ *un numero compreso fra* 0 e 1 (0 e 1 esclus.).

Si osservi infatti che le condizioni poste per $F(x)$ portano che $F(x_0+h)-F(x_0)$ non sia zero (osserv. 8.ª); e si consideri la funzione:

$$\varphi(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)}\left\{F(x)-F(x_0)\right\}$$

che si annulla per $x=x_0$, e $x=x_0+h$. Per il teorema della osservazione 8.ª si vedrà subito che deve esistere un punto $x_0+\theta h$ *interno* all'intervallo dato nel quale sia $\varphi'(x_0+\theta h)=0$, e perciò si avrà la formola indicata.

Si può notare che invece di supporre che $F'(x)$ non sia mai zero o infinita fra x_0 e x_0+h, potremmo supporre che non lo fosse $f'(x)$, e non fosse $F(x_0+h)=F(x_0)$, ec...

73. Mostrerò ora come il teorema contenuto nell'ultima delle osservazioni che precedono dia luogo anche ad altri risultati molto importanti che nei trattati di calcolo non si trovano ordinariamente dimostrati con tutto il rigore e con tutta la generalità di cui sono suscettibili.

Supponiamo perciò che la nostra funzione $f(x)$ coll'avvicinarsi di x indefinitamente ad un numero α a destra o a sinistra, p: es: a destra, possa anche crescere indefinitamente o divenire infinitesima, o anche possa avere una discontinuità di prima o di seconda specie per $x=\alpha$; ma, fuori del punto α nei punti di un intorno sufficientemente piccolo di α a destra, abbia sempre valori finiti (*) e sia continua e ammetta una derivata $f'(x)$ finita e determinata o infinita e determinata di segno; e proponiamoci di studiare come il modo di comportarsi di $f(x)$ coll'avvicinarsi di x ad α indefinitamente dipenda dal modo di comportarsi di $f'(x)$.

Per questo nel teorema contenuto nell'ultima delle osservazioni precedenti si supponga dapprima $F(x)=(x-\alpha)^{-k}$ essendo k una costante, e si prenda $x_0=\alpha+\delta$, $x_0+h=\alpha+\varepsilon$, con δ e ε numeri positivi arbitrariamente piccoli e $\delta<\varepsilon$. Si avrà:

$$f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha+\delta)=(\delta^{-k}-\varepsilon^{-k})\frac{f'(\alpha+\delta_1)}{k\,\delta_1^{-k-1}}, \tag{2}$$

con δ_1 compreso fra δ e ε, e di qui si trarrà:

$$f(\alpha+\varepsilon)\,\delta^k-f(\alpha+\delta)\,\delta^k=\left\{1-\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k\right\}\frac{f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{k+1}}{k} \tag{3}$$

Ora evidentemente il numero ε può supporsi piccolo quanto si vuole, e, se si suppone k positivo, per quanto piccolo si prenda ε si potrà sempre prendere poi δ talmente piccolo che le due quantità $f(\alpha+\varepsilon)\,\delta^k$, $\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k$ siano minori di quella quantità che più ci piace; quindi si avrà evidentemente per k positivo:

$$\lim_{\delta=0} f(\alpha+\delta)\,\delta^k=-\frac{1}{k}\lim_{\delta_1=0} f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{k+1}.$$

(*) È bene avvertire esplicitamente una volta per tutte, a scanso di equivoci, che dicendo qui che le quantità $f(x)$ e $f'(x)$ sono sempre finite, o prendono sempre valori finiti *nei punti* di ogni intorno di α (α escluso), non si esclude che alcuni di questi valori, pure essendo sempre finiti *in ogni punto speciale*, possano anche andare crescendo indefinitamente coll'avvicinarsi sempre più di x ad α.

Resta però ancora inteso che dicendo invece che una funzione $f(x)$ è finita in tutto un intervallo senz'altra osservazione, s'intenderà sempre che i suoi valori sono tutti compresi fra numeri finiti.

tutte le volte che uno almeno di questi due limiti è finito e determinato, o è infinito; e poichè quando $f'(\alpha+\delta)\,\delta^{k+1}$ per $\delta=0$ o $f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1}$ per $x=\alpha+0$ hanno un limite determinato e finito, o hanno per limite l'infinito, questo limite è evidentemente quello di $f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{k+1}$, si conclude che in questi casi si avrà:

$$\lim f(x)\,(x-\alpha)^k = -\frac{1}{k}\lim f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1}$$

i limiti intendendosi presi per $x=\alpha+0$; e questo ci permette intanto di dire che: *Se la funzione* $f(x)$ *nei punti di un intorno a destra del punto* α (α escluso) *è finita e continua, e la sua derivata* $f'(x)$ *negli stessi punti è finita e determinata,* allora *se per un dato valore positivo della costante* k *il prodotto* $f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1}$ *per* $x=\alpha+0$ *ha un limite determinato e finito* A, *la quantità* $f(x)\,(x-\alpha)^k$ *avrà pure un limite determinato e finito che sarà* $-\frac{A}{k}$; *e se la prima di queste quantità ha per limite* $\pm\infty$ *la seconda avrà per limite* $\mp\infty$, e si avrà così in questi casi:

$$\lim_{x=\alpha+0} f(x)\,(x-\alpha)^k = -\frac{1}{k}\lim_{x=\alpha+0} f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1}. \tag{4}$$

Similmente, prendendo invece nel teorema citato $F(x)=\log(x-\alpha)$, e osservando che allora si ha:

$$\frac{f(\alpha+\varepsilon)}{\log\delta}-\frac{f(\alpha+\delta)}{\log\delta}=-\left(1-\frac{\log\varepsilon}{\log\delta}\right)f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1, \tag{5}$$

si trova subito che: *sotto le stesse ipotesi intorno alla funzione* $f(x)$ *e alla sua derivata* $f'(x)$, si può dire anche che *se* $f'(x)\,(x-\alpha)$ *per* $x=\alpha+0$ *ha per limite una quantità finita e determinata* A, *la quantità* $f(x)\log(x-\alpha)$ *ha lo stesso limite* A; *e se* $f'(x)\,(x-\alpha)$ *ha per limite* $\pm\infty$ *anche* $f(x)\log(x-\alpha)$ *ha per limite* $\pm\infty$; e in questi casi si ha:

$$\lim_{x=\alpha+0}\frac{f(x)}{\log(x-\alpha)}=\lim_{x=\alpha+0} f'(x)\,(x-\alpha)\cdot \tag{6}$$

Teoremi analoghi si troverebbero quando si prendesse nel teorema citato $F(x)=(x-\alpha)^{-k}\log(x-\alpha)$, con k positivo ec...

Inoltre si può osservare che quando col tendere di δ a zero le quantità $f'(\alpha+\delta)\,\delta^{k+1}$, o $f'(\alpha+\delta)\,\delta$ senza avere un limite determinato oscillano fra limiti finiti diversi da zero e dello stesso segno, lo stesso per le formole (3) e (5) accadrà delle quantità $f(\alpha+\delta)\,\delta^k$ o $\frac{f(\alpha+\delta)}{\log\delta}$, o queste quantità avranno un limite finito e determinato e differente da zero; talchè per questo e per i teoremi testè enunciati si può anche asserire (§. 28) che *quando coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α (a destra) la derivata di $f'(x)$ è sempre determinata e finita (essendo o nò continua) ma cresce indefinitamente e per $x=\alpha+0$ diviene infinita di prim' ordine o di ordine $k+1$ superiore al primo, la funzione $f(x)$ per $x=\alpha+0$ diverrà infinita essa pure di ordine logaritmico o di ordine k respettivamente.*

Si può poi osservare che quando in ogni intorno sufficientemente piccolo di α a destra vi sono sempre dei punti nei quali la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ è infinita e determinata di segno, i prodotti $f'(x)(x-\alpha)^{k+1}$ con $k\geq 0$ non potranno avere un limite finito e determinato e tutt' al più potranno aver per limite l'infinito; talchè allora le eguaglianze dei due teoremi precedenti sussisteranno soltanto quando si abbia $\lim_{x=\alpha+0} f'(x)(x-\alpha)^{k+1}=\pm\infty$.

74. Supponiamo ora nella formula (2) k negativo e $=-p$; si avrà:

$$f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha+\delta)=(\varepsilon^p-\delta^p)\frac{f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{1-p}}{p};$$

e quindi evidentemente se la quantità $f'(\alpha+\delta)\,\delta^{1-p}$, con p positivo ma piccolo a piacer nostro, ha per limite zero o una quantità finita o oscilla fra limiti finiti, si potrà fare in modo che per tutti i valori di δ inferiori ad ε la differenza $f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha+\delta)$ per ε sufficientemente piccolo sia sempre numericamente minore di qualsiasi quantità arbitrariamente data σ. Ne segue (§. 22) che in tal caso $f(x)$ per $x=\alpha+0$ avrà un limite determinato e finito A, talchè si può intanto concludere che: *Se nei punti di un intorno di α a destra* (α escluso) *la funzione $f(x)$ ammette sempre una derivata determinata* (*continua o nò*) *che si mantiene inferiore a*

un numero finito o che, se cresce indefinitamente col tendere di x ad α, diviene infinita soltanto di un ordine che è inferiore al primo per una quantità finita p, la funzione $f(x)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α non supererà mai un certo numero finito, e avrà un limite determinato e finito, e in α verrà tutt'al più ad avere una discontinuità di prima specie.

Da ciò risulta che quando i valori di $f'(\alpha+\delta)\,\delta^{1-p}$ (anche soltanto per valori di p sufficientemente piccoli) hanno per limite zero o una quantità finita o oscillano fra limiti finiti, cambiando, se occorre, il valore di $f(x)$ nel punto α col prendere per $f(\alpha)$ il valore di $f(\alpha+0)$, la funzione $f(x)$ diverrà continua anche in questo punto; e allora, fatto, se occorre, questo cambiamento, potendo supporre $\delta=0$ nella formula precedente, si avrà:

$$(7) \qquad \frac{f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)}{\varepsilon^p}=\frac{f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{\,1-p}}{p},$$

ciò che ci permette di dire che *in questo caso se $f'(x)\,(x-\alpha)^{1-p}$ per valori differenti da zero e positivi di p ha un limite determinato e finito A per $x=\alpha+0$, la quantità $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{(x-\alpha)^p}$ per $x=\alpha+0$ avrà per limite $\dfrac{A}{p}$, e se il primo di questi limiti è $\pm\infty$ anche il secondo sarà $\pm\infty$*; e potrebbero quì pure trarsi conclusioni intorno agli ordini degli infinitesimi di $f(x)-f(\alpha)$ per $x=\alpha+0$ in relazione con quelli degli infinitesimi o degli infiniti di $f'(x)$ per $x=\alpha+0$, come abbiamo fatto sopra per gli infiniti della stessa $f(x)$.

Risultati analoghi si otterrebbero prendendo

$$F(x)=\frac{1}{\log(x-\alpha)}, \text{ ec.} \ldots$$

Si può poi notare come conseguenza del teorema enunciato sopra che *quando la solita funziane $f(x)$ ha una discontinuità di seconda specie nel punto α e le sue derivate fuori di questo punto sono sempre determinate e finite, esse coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α dovranno sempre prendere anche un numero infinito di valori che, sebbene finiti, siano numericamente maggiori di qualunque numero dato.*

Di ciò si ha un esempio per $x=0$ nelle funzioni che per $x=0$ hanno un valore finito qualunque e per x diverso da zero sono uguali a $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, o a $\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, ec....

75. Supponiamo poi nella formula (7) $p=1$ (con che essa si riduce a quella della osservazione 6.ª del §. 72); si vede allora chiaramente che: *Se la quantità $f'(x)$ per $x=\alpha+0$ ha un limite determinato e finito o un limite infinito, la derivata di $f(x)$ per $x=\alpha$ a destra esisterà essa pure e sarà uguale a questo limite di $f'(x)$; e se $f'(x)$ per $x=\alpha+0$ non avrà un limite determinato ma oscillerà fra limiti finiti coll'avvicinarsi di x ad α indefinitamente, allora o la derivata di $f(x)$ nel punto α sarà ancora determinata e finita, o il rapporto $\frac{f(\alpha+\delta)-f(\alpha)}{\delta}$ col tendere di δ a zero per valori positivi oscillerà anch'esso fra limiti finiti.* Risultati analoghi si hanno nel caso che $f(x)$ coll'avvicinarsi di x ad α indefinitamente oscilli fra limiti infinitamente discosti.

76. E dietro ciò si può anche per conseguenza affermare che: *Se in un intorno di un punto α a destra (α incluso) la funzione $f(x)$ è sempre finita e continua, nel punto $x=\alpha$ essa* potrà non *ammettere una derivata a destra nè finita nè infinita soltanto nei casi seguenti:*

1.° *che non esista una derivata finita e determinata o infinita e determinata di segno per ogni punto dello stesso intorno al di fuori di α.*

2.° *che esistendo questa derivata per ogni punto dell'intorno di α che si considera (α escluso), i suoi valori non abbiano un limite determinato finito o infinito per $x=\alpha+0$.*

77. E, *in quest'ultima ipotesi della esistenza delle derivate di $f(x)$ per ogni punto dell'intorno di α che si considera (α escluso),* avendo ancora riguardo alla formula che viene dalla (7) col farvi $p=1$, si può anche asserire che:

1.° *La derivata di $f(x)$ nel punto α a destra non potrà essere infinita altro che quando le derivate stesse abbiano per limite l'infinito per $x=\alpha+0$, o che senza aver per limite l'infinito, in infiniti punti dello stesso intorno prendano anche valori che sebbene finiti*

siano numericamente maggiori di qualunque quantità data, senza escludere con ciò che in alcuni punti dello stesso intorno possano *anche avere valori infiniti.*

2.° *Se la derivata $f'(\alpha)$ di $f(x)$ nel punto α a destra è determinata e finita, le derivate di $f(x)$ nei punti dell'intorno di α che si considera dovranno aver per limite $f'(x)$ per $x=\alpha+0$, o almeno in infiniti punti dello stesso intorno dovranno aver valori che differiscono da $f'(x')$ meno di qualunque quantità data, per quanto in infiniti altri punti del medesimo intorno* possano *anche avere valori molto differenti e anche essere infinite.*

78. S'intende poi che queste osservazioni condurrebbero anche ad altre relative al caso che nel punto α si considerino le derivate a destra e a sinistra ad un tempo, o le derivate intese nel modo ordinario, e si otterrebbero allora altri teoremi di complemento a quelli dei §§. 71 e 72.

Così p: es: per le osservazioni precedenti si troverà subito che: *Se $f(x)$ è una funzione che in tutto l'intervallo (α, β) è finita e continua, e, eccettuati tutt'al più gli estremi α e β, in tutti gli altri ammette una derivata determinata e finita o infinita e determinata di segno, questa derivata o prenderà valori numericamente inferiori a un numero finito in* qualunque *punto interno all'intervallo, o in* infiniti *punti dello stesso intervallo prenderà anche valori che, sebbene finiti, in valore assoluto saranno superiori a qualunque numero dato arbitrariamente grande,* senza escludere in quest'ultimo caso che possano esservi anche infiniti punti nei quali la derivata stessa è infinita.

E, nella solita ipotesi che $f(x)$ nell'intervallo (α, β) sia sempre finita e continua e fra α e β (α e β al più esclusi) ammetta sempre una derivata determinata e finita o infinita e determinata di segno, attribuendo alla derivata valori speciali anche negli estremi α e β quando in questi punti non esista, e considerando poi questa derivata nell'intervallo (α, β) come una funzione $\varphi(x)$ di x (che potrà quindi avere in alcuni punti anche valori infiniti), basterà aver riguardo al teorema del §. 75 per potere asserire che: *Nelle indicate ipotesi questa funzione derivata $\varphi(x)$ nei punti ove è finita non potrà avere mai discontinuità ordinarie neppure*

soltanto da una parte, ma potrà tutt'al più avere delle discontinuità di seconda specie; e nei punti ove è infinita dovrà comportarsi in modo che negli intorni degli stessi punti a destra e a sinistra i suoi valori abbiano per limite l'infinito o oscillino fra limiti infinitamente discosti, senza escludere con ciò che questi valori fuori del punto α possano anche esser sempre finiti, non ostante che alcuni di essi debbano essere arbitrariamente grandi in valore assoluto.

Così p: es: si vede che la derivata della funzione $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ esiste ed è finita per qualunque valore di x e nel punto $x=0$ ha una discontinuità, ma questa discontinuità è di seconda specie.

Similmente per la funzione che per $x=0$ è zero, per x positivo è $\sqrt{x}\left(1+x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$, e per x negativo è $-\sqrt{-x}\left(1+x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ ove i radicali sono presi positivamente, la derivata esiste sempre e nel punto $x=0$ è $+\infty$, ma negli intorni di questo punto, oscilla continuamente fra limiti arbitrariamente grandi positivi e negativi.

79. Fermandosi poi alle derivate di una funzione considerate soltanto a destra o a sinistra dei punti del solito intervallo, è facile dimostrare che la seconda parte del teorema del §. 71 può generalizzarsi col dire che: *Se una funzione $f(x)$ è finita e continua in tutto un intervallo* (α, β), *le sue derivate a destra* (o a sinistra) *dei punti dell'intervallo stesso* (un estremo escluso) *non possono essere tutte nulle a meno che la funzione non sia costante.*

Si supponga infatti per semplicità $\alpha<\beta$, e si ammetta che le derivate *a destra* di $f(x)$ per tutti i punti x dell'intervallo (β escl.) siano tutte nulle, e si formino le due funzioni:

$$\varphi(x)=f(x)-f(\alpha)+\theta(x-\alpha),\quad \psi(x)=f(x)-f(\alpha)-\theta(x-\alpha),$$

essendo θ una quantità positiva.

Queste funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ saranno finite e continue in tutto l'intervallo (α, β) come la $f(x)$, e le loro derivate a destra di ogni punto x nell'intervallo stesso (β escl.) saranno sempre uguali a θ e $-\theta$ respettivamente; quindi per ognuno di questi punti x e per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esisterà un valore speciale e positivo ε tale che per tutti i valori positivi di h inferiori ad ε si abbia in valore assoluto:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\theta<\sigma\,,\quad \frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}+\theta<\sigma\,,$$

e percio le differenze $\varphi(x+h)-\varphi(x)$, $\psi(x+h)-\psi(x)$ pei valori di h positivi e inferiori ad ε saranno l'una positiva e l'altra negativa.

Segue da ciò che per ogni intervallo da α a β', essendo $\beta'<\beta$, il massimo della funzione $\varphi(x)$ e il minimo di $\psi(x)$, (che certo dovranno esistere perchè queste funzioni sono continue) non potranno essere che nel punto estremo β' dell'intervallo stesso (α, β'), e perciò si avrà sempre $\varphi(\beta')>\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta')<\psi(\alpha)$ ovvero:

$$f(\beta')-f(\alpha)+\theta(\beta'-\alpha)>0\,,\quad f(\beta')-f(\alpha)-\theta(\beta'-\alpha)<0\,,$$

o anche:

$$-\theta(\beta'-\alpha)<f(\beta')-f(\alpha)<\theta(\beta'-\alpha);$$

quindi, poichè θ è arbitrariamente piccolo, si avrà intanto evidentemente $f(\beta')=f(\alpha)$ per tutti i valori di β' compresi fra α e β (β al più escluso); e ora, osservando che la funzione è sempre continua nell'intervallo (α, β), si conchiude che sarà anche (§. 45) $f(\beta)=f(\alpha)$, e il teorema resta così completamente dimostrato.

La stessa dimostrazione si farebbe pel caso delle derivate a sinistra; e ora con considerazioni simili a quelle svolte nel §. 72 si potrebbero generalizzare anche i teoremi 4.° e 5.° del paragrafo stesso.

80. Tornando ora a parlare delle derivate intese nel senso ordinario, osserveremo che, mentre in generale si può dire che quando una funzione $f(x)$ è finita e continua in un punto x l'accrescimento $f(x+\delta)-f(x)$ della funzione e l'accrescimento (positivo o negativo) δ della variabile divengono sempre insieme infinitesimi, colla considerazione delle derivate si possono enunciare risultati più completi, e si può affermare che:

1.° quando nel punto x la funzione $f(x)$ ammette una derivata che è determinata, finita e differente da zero, l'accrescimento $f(x+\delta)-f(x)$ della funzione stessa rispetto all'accrescimento δ della variabile, coll'impiccolire indefinitamente di quest'ultimo

diviene infinitesimo del prim' ordine, e in modo che il rapporto $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ abbia un limite determinato e indipendente dal segno di δ;

2.° quando la derivata di $f(x)$ nel punto x è zero o infinita (e determinata o nò di segno) l' accrescimento della funzione rispetto all' accrescimento δ della variabile diviene infinitesimo di ordine superiore o inferiore al primo respettivamente:

3.° e infine quando la derivata di $f(x)$ nel punto x è indeterminata, sia perchè il rapporto $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ pei valori negativi di δ non abbia lo stesso limite che pei valori positivi, sia perchè per δ positivo o per δ negativo o in ambedue i casi non abbia un limite determinato, l'accrescimento della funzione rispetto all'accrescimento della variabile considerato da una delle due parti di x o sarà ancora di prim' ordine, o, senza essere propriamente di ordine minore o uguale al primo, sarà di ordine *non maggiore* del primo o viceversa, o anche infine questi accrescimenti, sebbene ambedue infinitesimi, rispetto all'ordine di infinitesimo non saranno in nessun modo comparabili l'uno all' altro (§. 27); e mentre da una parte di x potrà presentarsi una di queste particolarità, dall'altra parte potrà presentarsene un altra, ec.

Per queste osservazioni poi e pel teorema del §. 71 può dirsi ora che se $f(x)$ è finita e continua in tutto un intervallo e non è costante, l'accrescimento della funzione rispetto a quello della variabile non può essere infinitesimo di ordine superiore al primo (neppure soltanto logaritmicamente ec.) in *tutti* i punti di una porzione qualunque dello stesso intervallo; e nel caso particolare che la funzione stessa abbia soltanto un numero finito di massimi e di minimi, si può dire anche che il suo accrescimento rispetto a quello della variabile non può essere sempre di ordine inferiore al primo per tutti i punti di una porzione qualunque dell' intervallo in cui si considera, perchè altrimenti la sua derivata in intervalli finiti sarebbe sempre infinita e determinata di segno (§. 72, 3.°), e questo non può essere.

81. Di quì si deduce in particolare che se la funzione $f(x)$ è

finita e continua in tutto un intervallo, e si prende a considerare una porzione qualunque di questo intervallo nella quale $f(x)$ non ha sempre uno stesso valore, non sarà possibile di trovare un numero positivo e differente da zero ε tale che in *ogni* intervallo h di ampiezza minore di ε preso nella stessa porzione le oscillazioni D_h della funzione siano di un ordine di piccolezza superiore a quello dell'intervallo h (anche soltanto logaritmicamente), in modo cioè che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ si possa trovare un valore sufficientemente piccolo di ε tale che per tutti gli intervalli h la cui ampiezza è inferiore ad ε il quoziente $\frac{D_h}{h}$ sia sempre minore di σ.

È chiaro infatti che se $(x, x+h)$ è un intervallo cui corrisponde l'oscillazione D_h si avrà in valore assoluto $\frac{D_h}{h} \geq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, e quindi se potesse esser sempre $\frac{D_h}{h} < \sigma$, la derivata di $f(x)$ sarebbe sempre zero qualunque fosse il punto x, e questo non può essere (§. 71).

E se $f(x)$, oltre essere finita e continua nell'intervallo dato, non avrà in questo intervallo un numero infinito di massimi e minimi, allora si può anche affermare che per qualunque porzione che si consideri dello stesso intervallo non sarà possibile di trovare un numero positivo e differente da zero ε tale che, in *ogni* intervallo h di ampiezza minore di ε preso nella stessa porzione le oscillazioni D_h della funzione siano di un ordine di piccolezza inferiore a quello dell'intervallo h (anche soltanto logaritmicamente), in modo cioè che per ogni quantità positiva e arbitrariamente grande ω si possa trovare un numero sufficientemente piccolo ε tale che per tutti gli intervalli h di ampiezza inferiore ad ε il quoziente $\frac{D_h}{h}$ sia sempre maggiore di ω.

In questo caso infatti, spezzando, se occorre, l'intervallo totale in più intervalli parziali limitati ai punti corrispondenti ai massimi e ai minimi, e supponendo che negli intervalli parziali così formati all'intervallo $(x, x+h)$ corrisponda la oscillazione D_h, si

avrà sempre in valore assoluto $\frac{D_h}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; e perciò, se potesse esser sempre $\frac{D_h}{h} > \omega$, la derivata di $f(x)$ sarebbe sempre infinita e determinata di segno per qualunque posizione del punto x, e questo è in contradizione col teorema del §. 71.

Se poi la funzione $f(x)$ nell'intervallo dato o nella porzione di esso che si considera ha un numero infinito di massimi e di minimi, allora potrebbe darsi che quest'ultima proprietà rispetto alle oscillazioni D_h di $f(x)$ non sussistesse più, e fin ora non si può affermar nulla di generale.

82. Quando la derivata di una funzione $f(x)$ che in un dato intervallo è finita e continua esiste per tutti i punti dello stesso intervallo ed è una nuova funzione $f'(x)$ della x finita e continua essa pure, si considera anche la derivata di questa funzione, e s'indica ordinariamente con $f''(x)$; e chiamando allora la $f'(x)$ derivata prima di $f(x)$, si chiama la $f''(x)$ derivata seconda di $f(x)$; e se questa derivata seconda è essa pure una nuova funzione della x finita e continua in tutto l'intervallo, allora si considera anche la sua derivata che si chiama derivata terza di $f(x)$ e s'indica con $f'''(x)$, e così di seguito.

Supponiamo ora che in un intorno $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ di un punto x' interno a un intervallo dato le derivate prime della funzione $f(x)$ siano finite e continue, e le derivate seconde siano finite e determinate, o infinite e determinate di segno, essendo però nel punto x' la derivata seconda $f''(x')$ di $f(x)$ una quantità finita k; e consideriamo la funzione $\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{2}x^2$ che nello stesso intorno avrà le stesse proprietà, e la cui derivata seconda nel punto x' sarà uguale a zero.

Supponendo $\delta < \varepsilon$, e indicando con θ, θ_1, θ_2, θ_3 dei numeri positivi compresi fra 0 e 1, si avrà (§. 72, 6.°):

$$\varphi(x'+\delta) = \varphi(x') + \delta\,\varphi'(x'+\theta\,\delta),$$

$$\varphi(x'-\delta) = \varphi(x') - \delta\,\varphi'(x'-\theta_1\,\delta),$$

e:

$$\varphi'(x'+\theta\,\delta)=\varphi'(x')+\theta\,\delta\,\varphi''(x'+\theta\,\theta_2\,\delta),$$

$$\varphi'(x'-\theta_1\,\delta)=\varphi'(x')-\theta_1\,\delta\,\varphi''(x'-\theta_1\,\theta_3\,\delta),$$

e perciò sarà:

$$\frac{\varphi(x'+\delta)-2\,\varphi(x')+\varphi(x'-\delta)}{\delta^2}=\theta\,\varphi''(x'+\theta\,\theta_2\,\delta)+\theta_1\,\varphi''(x'-\theta_1\,\theta_3\,\delta).$$

Ma, poichè la derivata seconda di $\varphi(x)$ nel punto x' esiste ed è uguale a zero, le quantità

$$\frac{\varphi'(x'+\theta\delta)-\varphi'(x')}{\theta\delta},\qquad \frac{\varphi'(x'-\theta_1\delta)-\varphi'(x')}{-\theta_1\delta}$$

avranno per limite zero per $\delta=0$; quindi, per le formole precedenti, altrettanto accadrà delle quantità $\varphi''(x'+\theta\theta_2\delta)$, $\varphi''(x'-\theta_1\theta_3\delta)$, e perciò si avrà:

$$\lim_{\delta=0}\frac{\varphi(x'+\delta)-2\,\varphi(x')+\varphi(x'-\delta)}{\delta^2}=0,$$

e quindi anche:

$$\lim_{\delta=0}\frac{f(x'+\delta)-2f(x')+f(x'-\delta)}{\delta^2}=k=f''(x');$$

ciò che ci permette di dire che: *Se le derivate prime di una funzione finita e continua $f(x)$ sono anch' esse finite e continue in tutto un intorno di un punto x'* interno *all'intervallo in cui la funzione $f(x)$ viene considerata, e se inoltre la derivata seconda $f''(x)$ di $f(x)$ in tutti i punti dello stesso intorno è determinata e finita, o è infinita e determinata di segno, essendo però finita nel punto x', il valore di questa derivata seconda in questo stesso punto x' potrà considerarsi come il limite della quantità:*

$$\frac{f(x'+\delta)-2f(x')+f(x'-\delta)}{\delta^2}\quad \textit{per}\ \delta=0.$$

Similmente si vedrebbe che, nelle stesse ipotesi, $f''(x')$ può altresì considerarsi come il limite per $\delta=0$ della quantità:

$\frac{f(x'+2\delta)-2f(x'+\delta)+f(x')}{\delta^2}$, anche se il punto x' è un estremo dell'intervallo.

È però da osservare che (come accade p: es: nel punto $x=0$ per la funzione che per $x=0$ è zero e per x differente da zero è uguale a $x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$) può benissimo avvenire che la quantità: $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$ per $\delta=0$ abbia un limite determinato e finito per il valore speciale x' di x, anche quando per questo stesso valore di x non esiste neppure la derivata prima di $f(x)$; talchè in molti casi, mentre per una funzione $f(x)$ potra ancora considerarsi il limite della stessa quantità $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$ per alcuni o anche per tutti i valori di x in un dato intervallo, non si potrà affatto parlare nè di derivata prima nè di derivata seconda della stessa funzione $f(x)$ per gli stessi valori di x.

E possiamo aggiungere che mentre la derivata prima e quindi anche la derivata seconda di una funzione $f(x)$ non hanno significato nei punti x di discontinuità della funzione stessa, il limite della quantità $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$ *può* avere un significato anche in questi punti quando le discontinuità siano tali che si abbia in essi $f(x)=\lim_{\delta=0}\frac{f(x+\delta)+f(x-\delta)}{2}$; e così in particolare il limite della quantità stessa *può* avere un significato anche nei punti delle discontinuità quando si tratti di discontinuità ordinarie per le quali si abbia $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

83. Si può poi dimostrare che: *Se la quantità:* $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$ *per* $\delta=0$ *ha per limite zero in tutti i punti interni a un intervallo* (α, β) *ove la funzione* $f(x)$ *è finita e continua, questa funzione sarà una funzione di primo grado in tutto l'intervallo, e quindi le sue derivate prime e seconde esisteranno sempre, e la sua derivata seconda sarà sempre zero.*

Supponiamo infatti che la funzione $f(x)$ nell'intervallo dato (α, β) soddisfi alle condizioni quì indicate rispetto alla quantità $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$, e osserviamo che se θ è una costante la funzione:

$$\varphi(x) = \pm \left\{ f(x) - f(\alpha) - \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \{ f(\beta) - f(\alpha) \} \right\} + \theta^2 (x-\alpha)(x-\beta),$$

che si annulla per $x=\alpha$ e $x=\beta$, sarà essa pure finita e continua in tutto l'intervallo (α, β) e si avrà per essa:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\varphi(x+\delta) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\delta)}{\delta^2} = 2\theta^2;$$

e quindi, per ogni valore di x nell'interno dell'intervallo (α, β), esisterà un numero positivo ε dotato della proprietà che la quantità $\varphi(x+\delta) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\delta)$ per tutti i valori di δ positivi e inferiori ad ε sia sempre positiva e differente da zero.

Da ciò risulta subito che $\varphi(x)$ dovrà essere sempre negativa o nulla nell'intervallo (α, β), poichè se potesse prendere anche valori positivi il punto x' corrispondente al massimo dei suoi valori (che certo deve esistere §. 47) non potrebbe trovarsi nè in α nè in β, perchè in questi punti si ha $\varphi(x)=0$, ma sarebbe nell'interno dell'intervallo; e così per ε sufficientemente piccolo e per $\delta < \varepsilon$ si avrebbe sempre:

$$\varphi(x'+\delta) - \varphi(x') \leq 0, \qquad \varphi(x'-\delta) - \varphi(x') \leq 0,$$

e la quantità $\varphi(x+\delta) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\delta)$ nel punto x' sarebbe sempre negativa o nulla, ciò che è contro a quanto abbiamo detto sopra; quindi $\varphi(x)$ dovrà essere negativa o zero in tutto l'intervallo (α, β) senza però potere essere sempre zero; e poichè il primo termine di $\varphi(x)$ ha il doppio segno, e il secondo (che è sempre negativo), a causa della arbitrarietà di θ, può supporsi piccolo quanto si vuole per tutti i valori di x fra α e β, si conclude che il primo termine di $\varphi(x)$ deve essere nullo in tutti i punti x fra

α e β e anche in questi limiti (§. 45), e si ha perciò in questo intervallo (i limiti inclusi):

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\{f(\beta)-f(\alpha)\},$$

come abbiamo enunciato.

84. Il teorema dimostrato continua a sussistere anche quando in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) o in un gruppo di punti di prima specie si è incerti sull'esistenza o sul valore del limite per $\delta=0$ della quantità: $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$, purchè nei punti nei quali si ha questa incertezza la quantità $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta}$ per $\delta=0$ abbia per limite zero e in tutti gli altri sia ancora $\lim\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}=0$, e $f(x)$ sia finita e continua in tutto l'intervallo (α, β).

Supponiamo infatti dapprima che i punti pei quali si è incerti intorno all'esistenza o al valore del limite della quantità $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$ siano in numero finito e siano i punti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$. Esclusi questi punti con intervalli arbitrariamente piccoli $(\alpha_1-\varepsilon_1, \alpha_1+\varepsilon_1)$, $(\alpha_2-\varepsilon_2, \alpha_2+\varepsilon_2), \ldots$, negli intervalli restanti successivi si avrà respettivamente:

$$f(x)=c_1x+d_1, \quad f(x)=c_2x+d_2, \quad f(x)=c_3x+d_3, \ldots.$$

ove le c e d sono costanti; e poichè $f(x)$ è continua anche nei punti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ e gli intervalli esclusi sono arbitrariamente piccoli, si vede subito intanto che si avrànno le eguaglianze (§. 45):

$$c_1\alpha_1+d_1=c_2\alpha_1+d_2, \quad c_2\alpha_2+d_2=c_3\alpha_2+d_3, \ldots,$$

e le formole precedenti sussisteranno da α a α_1, da α_1 a α_2, da α_2 a $\alpha_3 \ldots$ respettivamente (i limiti inclusi).

Osservando poi che nei punti stessi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ la quantità $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta}$ per $\delta=0$ deve avere per limite zero, e in uno qualunque α_s di questi punti questa quantità è uguale

a $c_{s+1}-c_s$, si concluderà subito che le quantità $c_1, c_2, c_3, \ldots$ e per conseguenza anche le $d_1, d_2, d_3, \ldots$ devono essere tutte eguali, e perciò $f(x)$ in tutto l'intervallo (α, β) dovrà essere una stessa funzione di primo grado $cx+d$, e così il teorema è intanto dimostrato nel caso che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ siano in numero finito.

Servendosi ora del processo che si tenne per un caso simile nel §. 72 3.°, il teorema attuale si estenderà al caso generale in cui il gruppo di punti nei quali si è incerti sulla esistenza o sul valore del limite della quantità: $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta^2}$ è un gruppo di punti di prima specie e di ordine qualunque, e così esso resterà completamente dimostrato.

È poi da osservare in particolare che la condizione posta rispetto al limite del rapporto $\frac{f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta)}{\delta}$ è sempre soddisfatta per quei punti x' interni all'intervallo (α, β) nei quali $f(x)$ ammette una derivata prima finita e determinata, perchè, potendo quel rapporto porsi sotto la forma
$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}-\frac{f(x-\delta)-f(x)}{-\delta}$, è evidente che, pei punti x' pei quali la derivata prima di $f(x)$ esiste ed è finita, esso ha per limite zero per $\delta=0$.

85. Dal teorema dimostrato poi si ha come corollario che: *Se $f(x)$ e $F(x)$ sono due funzioni di x finite e continue nell'intervallo (α, β), e se in questo intervallo $f(x)$ ammette una derivata prima $f'(x)$ finita e continua, e, eccettuato tutto al più un gruppo di punti di prima specie, in tutti gli altri ammette anche una derivata seconda finita $f''(x)$ (continua essa pure o nò), mentre poi la funzione $F(x)$ è tale che dei due rapporti:*

$$\frac{F(x+\delta)-2F(x)+F(x-\delta)}{\delta}, \quad \frac{F(x+\delta)-2F(x)+F(x-\delta)}{\delta^2}$$

il primo ha sempre per limite zero, e il secondo ha per limite $f''(x)$ per tutto tranne tutto al più in un gruppo di punti di prima specie, le due funzioni $f(x)$ e $F(x)$ in tutto l'intervallo (α, β) non potranno differire che per una stessa funzione di primo grado $cx+d$.

86. In modo simile si potrebbero dimostrare dei teoremi analoghi sulla funzione: $\frac{f(x+2\delta)-3f(x+\delta)+3f(x)-f(x-\delta)}{\delta^3}$ cui si è condotti dalla considerazione della derivata terza di $f(x)$; e teoremi simili si avrebbero anche sulle funzioni analoghe che vengono dalla considerazione delle altre derivate.

Infine osserveremo che i teoremi del calcolo differenziale sulle derivate delle somme, dei prodotti, dei quozienti ec. di più funzioni sussistono sempre quando le funzioni date e le funzioni derivate che per l'applicazione degli stessi teoremi conviene di considerare sono finite e determinate, e che le somme o i prodotti sono composti di un numero finito di termini o di fattori ec.

Teoremi sulle serie.

87. Ricordiamo che si chiama *serie* un aggregato

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

di termini reali o complessi il cui numero è infinito; e si dice *somma* o *valore* della serie il limite della somma s_n dei suoi primi n termini per n crescente indefinitamente. Si dice poi che questa serie è *convergente* quando il detto limite è finito e determinato; mentre si dice che è *divergente* quando lo stesso limite in valore assoluto o in modulo è infinito, e si dice che è *indeterminata* quando il detto limite non esiste.

Ricordiamo inoltre che, se una serie è convergente, il limite dei suoi termini u_n per n crescente indefinitamente è zero; ma il trovare soddisfatta questa condizione non basta per potere concludere che la serie è convergente. E si può dire che per la convergenza di una serie è necessario e sufficiente che la somma $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}=s_{n+p}-s_n$ di un numero qualunque p dei termini consecutivi presi dopo l'n^o abbia per limite zero col crescere indefinitamente di n (§. 23), o anche (il che torna lo stesso) che ciò che chiamasi *resto* della serie, cioè la somma r_n della serie $u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots$ dei termini che seguono l'n^o, abbia per limite zero per n crescente indefinitamente.

Infine ricordiamo che, a differenza delle somme composte di un numero finito di termini, le serie possono cangiare valore quando si cangia l'ordine secondo cui si succedono i loro termini, e perciò esse si distinguono in serie convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini o incondizionatamente, e in serie non convergenti indipendentemente dall' ordine dei termini o semplicemente convergenti, secondochè la detta circostanza può o nò presentarsi; e si dimostra che onde una serie reale o complessa sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è necessario e sufficiente che la serie formata coi valori assoluti o coi moduli degli stessi termini sia convergente.

88. Sulle serie poi, in quanto esse possono cangiare valore mutando l'ordinamento dei loro termini, sono anche da farsi le seguenti considerazioni.

Sia

$$(1) \qquad u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

una serie che per semplicità supporremo reale, e i suoi termini siano in parte positivi e in parte negativi, e tendano a zero col crescere indefinitamente di n.

Indichiamo con S_n la somma dei primi n termini di questa serie, e supponiamo che:

$$(2) \qquad \alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_m+\ldots$$

$$(3) \qquad \beta_1+\beta_2+\ldots\quad+\beta_m+\ldots.$$

siano le due serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi che compongono la serie (1).

In S_n entrerà un certo numero m dei primi termini della serie (2) e un certo numero m' dei primi termini della serie (3); quindi, se si indicano con σ_m, e $\sigma'_{m'}$ le somme respettive di questi m e m' primi termini delle serie (2) e (3), si avrà:

$$S_n=\sigma_m-\sigma'_{m'}, \qquad \text{e:} \qquad \lim S_n=\lim(\sigma_m-\sigma'_{m'}),$$

donde si vede subito che quando le serie (2) e (3) siano ambedue convergenti, la serie (1) sarà convergente indipendentemente dal-

l'ordine dei termini, e quando una sola delle serie (2) e (3) sia divergente, la serie (1) sarà divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini; talchè resta ora a considerarsi soltanto il caso in cui le serie (2) e (3) siano ambedue divergenti.

In questo caso è facile vedere che si potrà sempre, e in infiniti modi, cangiare l'ordine dei termini della serie (1) in modo da fare sì che essa divenga convergente e abbia per somma una quantità qualunque data, o divenga divergente, o divenga indeterminata.

Indichiamo perciò con h una quantità finita e positiva qualunque, e mostriamo subito come possano ordinarsi i termini della serie (1) in modo da fare sì che essa sia convergente e la sua somma venga ad essere precisamente h.

Per questo supponiamo che i termini della serie (2) a partire dal primo siano già tutti minori di h; se questo non fosse, potremmo aggruppare con una legge qualunque un certo numero dei primi termini delle serie (2) e (3) fino a trovare che i termini seguenti della serie (2) soddisfacessero a questa condizione, e che la somma algebrica dei termini così aggruppati, prendendo quelli della serie (2) col segno $+$ e quelli della serie (3) col segno $-$ fosse una quantità negativa o nulla; e allora se $-k$ fosse questa somma, si considererebbero le serie (2) e (3) a partire da questi termini, e con esse si cercherebbe di formare un altra serie nella quale le α_s fossero prese col segno $+$ e le β_s col segno $-$, e la cui somma fosse $h+k$.

Ciò posto, osserviamo che, siccome le serie (2) e (3) sono divergenti, potremo prendere un numero finito p_1 di termini α_1, $\alpha_2 \dots \alpha_{p_1}$ della serie (2) tali che la loro somma restando inferiore a $h+\beta_1$ ne differisca meno del termine seguente α_{p_1+1}, o la differenza sia tutt'al più uguale a questo termine; poi si potranno prendere altri p_2 termini $\alpha_{p_1+1}, \alpha_{p_1+2}, \dots, \alpha_{p_1+p_2}$ tali che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p_1}+\alpha_{p_1+1}+\alpha_{p_1+2}+\dots+\alpha_{p_1+p_2}$ sia inferiore a $h+\beta_1+\beta_2$ ma ne differisca meno del termine seguente $\alpha_{p_1+p_2+1}$, o la differenza sia tutt'al più uguale a questo termine, $\dots$; e in generale dopo il termine $\alpha_{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}}$ si potranno prendere altri p_n termini $\alpha_{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}+1}, \dots \alpha_{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}+p_n}$ tali che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p_1+p_2+\dots+p_n}$ restando inferiore a:

$h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ ne differisca meno del termine seguente $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$ o la differenza sia tutt' al più uguale a questo termine; e di questi numeri $p_1, p_2 \ldots p_n$ alcuni potranno anche essere zero perchè può essere, per esempio, che β_s sia tanto piccolo che la somma $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}}$ che differisce da $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s-1}$ meno del termine $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{s-1}+1}$ differisca anche da $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{s-1}+\beta_s$ meno dello stesso termine,...; però la somma $p_1+p_2+\cdots+p_n$ dovrà crescere indefinitamente con n, perchè la quantità $h+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$ cresce pure indefinitamente con n.

Conseguentemente con questi gruppi successivi si potrà formare la serie:

$$(4)\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1}-\beta_1+\alpha_{p_1+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2}-\beta_2+\cdots-\beta_{n-1}+ \alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n}-\beta_n+\cdots$$

che non sarà che la (1) scritta in un ordine particolare; e in questa serie (siccome alcune delle p possono anche essere nulle) anche i termini negativi potranno trovarvisi successivamente a gruppi. Però sì i gruppi dei termini positivi che quelli dei termini negativi tenderanno a zero col crescere indefinitamente di n, poichè l'aggiunta di un gruppo positivo, p: es: l'n^o, fa sì che la somma si aumenti soltanto di una quantità minore di $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1}+\beta_n$ e il seguente gruppo negativo è evidentemente minore di $\beta_n+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$, e per le ipotesi fatte sì l'una che l'altra di queste somme hanno per limite zero per $n=\infty$.

Ciò posto, se facciamo:

$$S'_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p_1}-\beta_1+\cdots+\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n}-\beta_n,$$

si avrà evidentemente:

$$h-\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}\leq S'_n<h;$$

e poichè n può supporsi così grande che per lo stesso valore di n e pei valori maggiori il termine $\alpha_{p_1+p_2+\cdots+p_n+1}$ sia sempre minore di quella quantità che più ci piace, si ha di qui che $\lim S'_n=h$;

e si conclude perciò che la serie (4) è convergente e ha per somma h, giacchè se arrestandosi a un gruppo di termini negativi si è avuto h per limite della somma S'_n, altrettanto accadrà arrestandosi a qualunque altro punto sì in un gruppo positivo che in un gruppo negativo perchè, per quanto si è visto, questi gruppi e quindi anche le loro parti tendono a zero.

Così si vede intanto che i termini della serie (1) si possono ordinare in modo che la sua somma si riduca alla quantità data h; ed anche si capisce che ciò potrà farsi in infiniti altri modi, seguendo altre leggi per formare i successivi gruppi delle serie (2) e (3), e anche seguendo sempre il metodo precedente, ma prendendo invece di h una funzione positiva di n che per n crescente indefinitamente abbia per limite h. In modo analogo si proverebbe che si possono dare ai termini della serie (1) ordinamenti tali che la sua somma divenga una quantità negativa data; e, prendendo invece di h una funzione positiva o negativa di n che col crescere indefinitamente di n abbia per limite l' infinito o non abbia un limite determinato, con ragionamenti analoghi si vedrebbe anche che la serie (1) si può ridurre ad infinite altre serie che siano divergenti o siano indeterminate; talchè riassumendo si può dire ora che: *Essendo data una serie reale:*

$$(5) \qquad u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi e tendono a zero col crescere indefinitamente di n, e essendo:

$$(6) \qquad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

$$(7) \qquad \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\cdots$$

le serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi:

1.° *Se queste due serie* (6) *e* (7) *sono ambedue convergenti, la serie data* (5) *è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini:*

2.° *Se una sola delle serie* (6) *e* (7) *è divergente, la serie data* (5) *è divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini:*

3.° *Se le serie* (6) *e* (7) *sono ambedue divergenti, si potrà sempre*

cambiare l'ordine dei termini nella serie (5) *in modo da far sì che essa divenga convergente e abbia per somma una quantità qualunque data, o venga divergente o venga indeterminata; e ciò potrà anche farsi in un numero infinito di modi.*

In particolare si può dunque dire che: *data una serie semplicemente convergente o inderminata i cui termini tendono a zero, cangiando convenientemente l'ordine dei suoi termini si potrà ridurla ad essere convergente e avere per somma una quantità qualunque data, e ridurla ad essere divergente o essere indeterminata; e ciò potrà sempre farsi in un numero infinito di modi.*

E supponendo che le due serie (6) e (7) siano uguali, cioè sia $\alpha_n = \beta_n$, si ha in particolare che: *se* $\Sigma\alpha_n$ *è una serie divergente a termini positivi, formando una nuova serie* Σu_n *i cui termini positivi siano quelli di* $\Sigma\alpha_n$ *e i cui termini negativi siano ancora quelli di questa serie stessa presi negativamente, si potrà in infiniti modi ottenere che la serie così formata* Σu_n *sia divergente o sia indeterminata, o sia convergente e abbia per somma una quantità qualunque data.*

Così p. es. partendo dalla serie divergente $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ si possono formare le serie:

$$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+$$
$$+\frac{1}{3n}-\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\cdots-$$
$$-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-1)^2+1}+\frac{1}{(n-1)^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+\cdots$$

delle quali la prima ha per somma log 2, la seconda ha per somma log 3, e la terza è divergente, non ostante che in ciascuna di esse

per ogni termine positivo $\frac{1}{n}$ esista anche il corrispondente negativo $-\frac{1}{n}$.

89. Per dimostrare ora un altro teorema sulle serie che ci sarà molto utile in seguito, premettiamo l'altro di *Abel* che dice che: *Se v_1, v_2, ... v_p sono quantità reali e finite tali che le somme v_1, v_1+v_2, $v_1+v_2+v_3$, ... , $v_1+v_2+ ... +v_p$ siano tutte comprese fra due quantità a e A, essendo $a<A$, e se ε_1, ε_2, ε_3,..., ε_p sono quantità positive che non vanno crescendo si avrà:*

$$\varepsilon_1 a<\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots+\varepsilon_p v_p<\varepsilon_1 A.$$

Poniamo infatti:

$$v_1=s_1,\quad v_1+v_2=s_2,\quad v_1+v_2+v_3=s_3,\ldots,\quad v_1+v_2+v_3+\ldots+v_p=s_p;$$

si avrà $v_1=s_1$, $v_2=s_2-s_1$, $v_3=s_3-s_2$,..., $v_p=s_p-s_{p-1}$; e perciò sarà:

$$\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots+\varepsilon_p v_p=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)s_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)s_2+\ldots+(\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p)s_{p-1}+\varepsilon_p s_p,$$

e quindi sarà evidentemente:

$$\varepsilon_1 a<\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots+\varepsilon_p v_p<\varepsilon_1 A,$$

come abbiamo enunciato sopra.

Se poi le ε_1, ε_2, ... ε_p fossero tutte positive e non andassero decrescendo, allora *si troverebbe subito invece:*

$$\varepsilon_1 a+\varepsilon_p(A-a)>\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots+\varepsilon_p v_p>\varepsilon_1 A-\varepsilon_p(A-a);$$

talchè anche in questo caso si ha una proprietà simile a quella di Abel.

Si aggiunge che se l'una o l'altra delle quantità a, A sarà uguale a una o a più delle somme v_1, v_1+v_2,..., $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_p$, uno dei segni di disuguaglianza precedenti potrebbe tutt'al più convertirsi in una uguaglianza; talchè restando nel primo caso si può anche dire che: *se le quantità ε_1, ε_2, ..., ε_p sono tutte positive e non vanno crescendo, e le somme v_1, v_1+v_2, $v_1+v_2+v_3$,..., $v_1+v_2+\ldots+v_p$ non sono inferiori ad a, nè superiori ad A, si avrà:*

$$\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots+\varepsilon_p v_p=\varepsilon_1 C,$$

essendo C *un valore intermedio fra a e* A (*a* e A incl.) *o un valore compreso fra la massima e la minima delle somme*

$$v_1,\ v_1+v_2,\ v_1+v_2+v_3,\dots,\ v_1+v_2+\cdots+v_p.$$

Similmente si vede che: *Se le quantità $v_1, v_2 \cdots v_p$ sono tutte o in parte complesse, e i moduli delle somme*

$$v_1,\ v_1+v_2,\cdots,\ v_1+v_2+\cdots+v_p$$

sono tutti minori di A, *e le $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p$ sono ancora quantità positive che non vanno crescendo, si avrà:*

$$\operatorname{mod}\,(\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\cdots+\varepsilon_p v_p)<\varepsilon_1 \mathrm{A}.$$

90. Da questi lemmi risulta immediatamente il teorema sulle serie che volevamo dimostrare, cioè che: *Se una serie reale o complessa Σu_n è convergente, e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ sono quantità che almeno a partire da un certo valore n' di n sono positive e non vanno crescendo, anche la serie $\Sigma \varepsilon_n u_n$ sarà convergente.*

Si osservi infatti che se Σu_n è convergente, esisterà un numero $n>n'$ tale che le somme di un numero qualunque di termini consecutivi a partire dall'n^o abbiano tutte dei moduli minori di una quantità arbitrariamente piccola σ; e quindi per il lemma precedente le somme corrispondenti della serie $\Sigma \varepsilon_n u_n$ avranno moduli minori di $\varepsilon_{n+1}\sigma$, e perciò anche la serie $\Sigma\, \varepsilon_n u_n$ sarà convergente.

Sulle serie poi si hanno altri teoremi che in molti casi servono a decidere della loro convergenza o divergenza; ma, poichè sono notissimi, non staremo a richiamarli.

91. Passiamo ora ad esporre alcune considerazioni e alcuni teoremi generali sulle serie i cui termini in un dato intervallo (α, β) sono funzioni reali e finite di una variabile reale x, o più generalmente dipendono da una variabile reale x che può prendere infiniti valori in questo intervallo.

Sia perciò:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

una serie i cui termini nell'intervallo dato (α, β) (α e β inclus.)

sono funzioni reali e finite della variabile x, o dipendono da una variabile x che può prendere infiniti valori nello stesso intervallo, e questa serie sia convergente per tutti i valori di x che possono considerarsi. A causa di questa convergenza, *per ogni valore speciale di x* che può considerarsi fra α e β (α e β inclus.) e per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esisterà un numero intero e finito m dotato della proprietà che pei valori di n non inferiori ad m il resto $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ della serie data in valore assoluto sia minore di σ; però evidentemente questo numero m potrà variare con x e coll'avvicinarsi di x a certi valori speciali potrà anche crescere indefinitamente, senza però essere infinito per nessun valore speciale di x; o, in altri termini, questo numero m, *senza essere mai infinito*, potrà avere per limite superiore l'infinito; e allora per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ non esisterà un numero finito m dotato della proprietà che per $n \geq m$ e per *tutti i valori* di x che possono considerarsi fra α e β (α e β inclus.) si abbia sempre in valore assoluto $R_n < \sigma$.

In vista di questa circostanza, quando si abbia una serie Σu_n i cui termini sono funzioni di x in un dato intervallo (α, β) o anche più generalmente sono dati in un gruppo infinito di punti x dello stesso intervallo, si dirà che questa serie *è convergente in ugual grado in tutto l'intervallo* (α, β) o almeno *per tutti i punti* o *valori x che si possono considerare nello stesso intervallo* quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esiste un numero finito m dotato della proprietà che per $n \geq m$ e per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra α e β si ha in valore assoluto $R_n < \sigma$; e si dirà che la serie data Σu_n non è convergente in egual grado nello stesso intervallo o pei valori di x fra α e β che possono considerarsi quando per ogni numero positivo σ non esiste un numero finito m che soddisfa alle dette condizioni.

Si dirà poi che la stessa serie Σu_n è convergente in egual grado *soltanto in generale* nell'intervallo dato (α, β) o pei valori di x che possono considerarsi in questo intervallo, quando, senza essere effettivamente convergente in ugual grado nel senso indicato sopra, è tale però che, togliendo dallo stesso intervallo un numero finito p di intervalli piccoli quanto si vuole, negli inter-

valli restanti o pei punti x che possono considerarsi in questi intervalli essa è convergente in ugual grado.

E si dirà infine che una serie Σu_n *è convergente in ugual grado semplicemente* nell'intervallo (α, β), o pei valori di x che possono considerarsi in questo intervallo, quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ e per *ogni* numero m' esiste un numero intero m non inferiore a m' e tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra α e β (α e β inclus.) il resto R_m corrispondente a quel numero m sia numericamente minore di σ (*); e così si può asserire che una serie convergente in egual grado fra α e β lo sarà sempre anche semplicemente, ma almeno per ora, non si può affermare in generale la cosa inversa.

Però, quando ci si limiti a considerare le serie Σu_n che sono a termini positivi per tutti i valori di x che si considerano fra α e β e sono convergenti in ugual grado semplicemente per gli stessi valori di x, o quelle che avendo dei termini negativi restano convergenti in ugual grado semplicemente anche quando si riducono i loro termini ai respettivi loro valori assoluti, allora si può anche dimostrare che le condizioni cui le serie stesse soddisfano portano di necessità la loro convergenza in ugual grado (in modo assoluto) pei valori che si considerano di x fra α e β.

Indicando infatti con $\Sigma u'_n$ la serie formata coi valori assoluti dei termini di Σu_n, e con m uno dei numeri non inferiori a m' che nelle ipotesi fatte godono della proprietà che il resto corrispondente R'_m di questa serie $\Sigma u'_n$ per tutti i valori di x che si considerano fra α e β sia inferiore a σ, s' intende subito che i resti successivi R'_{m+1}, R'_{m+2},.... della stessa serie (non essendo mai superiori a R'_m) saranno tutti inferiori a σ, e perciò evidentemente lo stesso accadrà pei valori assoluti dei resti corrispondenti R_m, R_{m+1}, R_{m+2} ... della serie data Σu_n, e questa serie sarà convergente in ugual grado.

92. Per mostrare fin d'ora l'esistenza di serie Σu_n che, sebbene convergenti in tutto un intervallo, non sono in esso convergenti

(*) Per quanto sò non si conoscono per ora serie che in un dato intervallo o per dati valori di x siano convergenti in ugual grado soltanto semplicemente; ma è certo permesso di *dubitare* che possano esistere anche di tali serie.

in ugual grado neppure semplicemente, faremo subito vedere che questa circostanza si presenta sempre in ogni serie Σu_n i cui termini sono funzioni finite e continue di x in un punto a dello stesso intervallo (*), mentre in questo punto la somma $f(x)$ della serie è una funzione discontinua di x.

Supponiamo infatti che almeno da una parte del punto a, p: es: a destra, $f(x)$ sia discontinua, e indichiamo con m' un valore di n tale che per $n \geq m'$, e per $x=a$ si abbia in valore assoluto $R_n < \sigma$, e poniamo:

$$f(a) = S_m + R_m, \quad f(a+\delta) = S'_m + R'_m,$$

ove m è finito e $\geq m'$. Evidentemente, siccome m è un numero finito, e le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$ sono continue per $x=a$, per quanto grande sia m potremo trovare un numero differente da zero e positivo ε tale che pei valori di δ positivi e inferiori ad ε la somma S'_m in valore assoluto differisca da S_m meno di una quantità positiva qualunque arbitrariamente piccola; e poichè, se il salto di $f(x)$ nel punto a è maggiore di d, $f(a+\delta)$ e $f(a)$ almeno per alcuni dei valori di δ che si considerano devono differire fra loro più di d, R_m e R'_m per quanto grande sia m verranno a differire di una quantità d' che sarà maggiore di 2σ se σ è sufficientemente piccolo; quindi, qualunque valore non inferiore a m' si prenda per m, esisteranno sempre alcuni di questi valori di δ pei quali R'_m sarà numericamente maggiore di σ; e perciò evidentemente la serie data Σu_n nell'intervallo (α, β) non sarà convergente in egual grado neppure semplicemente, e potrà tutt' al più essere convergente in egual grado soltanto in generale nello stesso intervallo quando i suoi termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ siano funzioni continue e la sua somma $f(x)$ sia generalmente continua nell'intervallo.

93. Passiamo ora a dimostrare i seguenti teoremi generali. Teorema I. *Se i termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ della serie Σu_n sono funzioni di x sempre finite fra α e β (α e β incl.), e se la serie $\Sigma u'_n$ formata coi limiti superiori dei valori assoluti degli stessi termini o con*

(*) Notiamo una volta per tutte, a scanso di equivoci, che quando si dice che una serie infinita di quantità $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ hanno date proprietà, s'intende dire che queste proprietà sono verificate o possono verificarsi fino a valori di n grandi quanto si vuole.

numeri maggiori di questi limiti è convergente, la serie data Σu_n *per tutti i valori di* x *fra* α *e* β (α *e* β *incl.) sarà convergente e sarà quindi una funzione di* x; *e inoltre sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini e convergente in ugual grado.*

Indichiamo infatti con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ i valori assoluti di $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ per un valore speciale qualunque di x fra α e β (α e β incl.). La serie $\Sigma\rho_n$, avendo i suoi termini eguali o inferiori a quelli della serie $\Sigma u'_n$, sarà convergente, quindi pel valore speciale di x che si considera, e così anche per tutti gli altri, la serie Σu_n sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e essendo convergente rappresenterà una funzione di x in tutto l'intervallo. Inoltre, poichè si ha $\rho_{n+1}+\rho_{n+2}+\ldots \leqq u'_{n+1}+u'_{n+2}+\ldots$, indicando con m un numero tale che per $n \geqq m$ si abbia $u'_{n+1}+u'_{n+2}+\ldots < \sigma$, si vede subito che questo numero m gode anche della proprietà che per $n \geqq m$ il resto R_n della serie Σu_n per *tutti* i valori di x fra α e β (α e β inclus.) in valore assoluto è sempre minore di σ; quindi la serie $\Sigma\, u_n$ nell'intervallo (α, β) sarà anche convergente in egual grado, e il teorema è completamente dimostrato.

È da notare che se i termini u_n della serie Σu_n invece di essere funzioni di x fra α e β sono dati soltanto per alcuni valori di x corrispondenti a un gruppo di punti di prima o di seconda specie fra α e β, il teorema dimostrato continua ancora a sussistere colla sola differenza che la somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n non sarà più una vera e propria funzione di x fra α e β ma sarà una quantità che avrà un significato soltanto pei valori di x pei quali sono dati i termini stessi u_n.

94. Teorema II. *Se i termini* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *di una serie* Σu_n *sono funzioni di* x *in un intervallo* $(a, a+\varepsilon)$ *posto a destra di un punto* a *e la cui ampiezza è differente da zero ma arbitrariamente piccola, o anche son dati soltanto in un gruppo infinito di punti* x *dello stesso intervallo pei quali* a *è semplicemente un punto-limite, e se i loro limiti* u'_n *per* $x=a+0$ *sono determinati e finiti, e la serie* Σu_n *nell'intervallo stesso o pei valori di* x *che si possono considerare è convergente in ugual grado, allora la somma* $U^{(x)}$ *di questa serie avrà essa pure un limite determinato e finito per*

$x=a+0$, *e questo limite sarà la somma della serie dei limiti* $\Sigma u'_n$ (la quale per conseguenza si ridurrà a un polinomio o sarà convergente).

Siano infatti x_1 e x_2 due qualunque dei valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.); si avrà:

$$U^{(x_1)}-U^{(x_2)}=\sum_1^m\left\{u_n^{(x_1)}-u_n^{(x_2)}\right\}+R_m^{(x_1)}-R_m^{(x_2)},$$

indicando in generale con $u_n^{(x)}$ e $R_m^{(x)}$ i valori di u_n e R_m pel valore x della variabile; e per le ipotesi ammesse si potrà sempre scegliere m in modo che per *tutti* i valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon$, e quindi anche pei valori x_1 e x_2, i resti $R_m^{(x)}$ siano numericamente minori di un numero arbitrariamente piccolo σ.

Ma poichè il nnmero m, dopo di essere stato scelto in tal modo, può riguardarsi come un numero fisso, si potrà evidentemente trovare (§. 22) un numero $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tale che per tutti i valori di x_1 e x_2 compresi fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escl.) la somma $\sum_1^m\left\{u_n^{(x_1)}-u_n^{(x_2)}\right\}$ sia essa pure numericamente minore di σ; quindi evidentemente si avrà in valore assoluto $U^{(x_1)}-U^{(x_2)}<3\sigma$, e perciò la somma $U^{(x)}$ della serie data avrà un limite determinato e finito per $x=a+0$ (§. 22).

Ora, chiamando U questo limite, si potrà evidentemente prendere un numero $\varepsilon_2 \leq \varepsilon$ talmente piccolo che per tutti i valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon_2$ (a escl.) la differenza $U^{(x)}-U$ sia numericamente minore di σ; quindi, poichè si ha:

$$U^{(x)}-\sum_1^m u'_n=\sum_1^m(u^{(x)}-u'_n)+R_m^{(x)},$$

si vede subito che sarà:

$$U-\sum_1^m u_n'=\sum_1^m(u_n^{(x)}-u'_n)+R_m^{(x)}+\theta\sigma,$$

con θ compreso fra -1 e $+1$; e ora osservando anche che a

causa della convergenza in ugual grado di Σu_n fra a e $a+\varepsilon$, a partire da un certo valore m' di m i resti $R_m^{(x)}$ sono sempre numericamente minori di σ, e per quanto grande si prenda m si può sempre prendere poi ε_2 così piccolo che la somma $\sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n)$ sia anch'essa numericamente minore di σ, si conclude che a partire da un certo valore di m si avrà sempre in valore assoluto $U - \sum_1^m u'_n < 3\sigma$, e perciò la serie $\Sigma u'_n$ sarà un polinomio o sarà convergente e avrà per somma U, e questo completa la dimostrazione del teorema.

Notiamo che quando per solo dato si avesse che fra a e $a+\varepsilon$ la serie Σu_n è convergente in ugual grado *soltanto semplicemente*, colla prima parte della dimostrazione precedente si troverebbe ancora che la somma $U^{(x)}$ di questa serie ha un limite determinato e finito per $x=a+0$; ma, resterebbe incerto se questo limite fosse o nò la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$. Però quando si sapesse anche che la serie limite $\Sigma u'_n$ si riduce a un polinomio o è convergente, allora si potrebbe ancora affermare che il limite di Σu_n è la somma della serie $\Sigma u'_n$, perche in tal caso indicando con R'_m il resto di questa serie $\Sigma u'_n$, si avrebbe la formola:

$$U^{(x)} - \Sigma u'_n = \sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n) + R_m^{(x)} - R'_m;$$

e scegliendo m in modo che sia maggiore di quel numero m' dopo il quale R'_m è zero o è numericamente minore di σ, e sia tale che si abbia sempre $R_m^{(x)} < \sigma$, e prendendo poi ε sufficientemente piccolo, si troverebbe ancora che $\lim U^{(x)} = \Sigma u'_n$.

95. Teorema III. *Se i termini di una serie Σu_n sono funzioni di x in un dato intervallo (α, β), o dipendono da una variabile x che può prendere un numero infinito di valori dei quali a è un punto-limite, e se i limiti u'_n degli stessi termini u_n per $x=a$ a destra o a sinistra, p: es: a destra, sono determinati e finiti, affinchè il limite della somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n per $x=a+0$ sia determinato e finito e sia la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$, è necessario e*

sufficiente: 1.° *che questa serie limite* $\Sigma u'_n$ *sia convergente:* 2.° *che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo* σ *e per ogni numero intero* m' *comunque grande si possano trovare due numeri* ε *e* m *dei quali il primo sia differente da zero e positivo e il secondo sia intero e maggiore di* m' *e tali che per tutti i valori di* x *che si possono considerare fra* a *e* $a+\varepsilon$ (a escl.) *il resto* $R_m^{(x)}$ *della serie* Σu_n *sia numericamente minore di* σ.

Supponiamo infatti che la serie dei limiti $\Sigma u'_n$ sia convergente, e osserviamo che si ha:

$$(8) \qquad U^{(x)}-\Sigma u'_n=\sum_1^m(u_n^{(x)}-u'_n)+R_m^{(x)}-R'_m,$$

essendo R'_m il resto della serie dei limiti $\Sigma u'_n$. In questa formula m potrà supporsi maggiore del numero m' a partire dal quale, a causa della convergenza di $\Sigma u'_n$, si ha in valore assoluto $R'_m<\sigma$; quindi, osservando che quando è soddisfatta anche la seconda delle condizioni poste sopra si possono sempre trovare due numeri m ed ε pei quali $R_m^{(x)}$ per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.) sia anch'esso numericamente inferiore a σ, e poi, dopo di aver fissato così il valore di m, prendendo un numero $\varepsilon_1\leq\varepsilon$ si potrà anche fare in modo che quando x è compreso fra a e $a+\varepsilon_1$ si abbia sempre in valore assoluto $\sum_1^m(u_n^{(x)}-u'_n)<\sigma$, si conclude subito che per questi valori di x si avrà sempre in valore assoluto $U^{(x)}-\Sigma u'_n<3\sigma$, e perciò sarà $\lim U^{(x)}=\Sigma u'_n$.

Viceversa se $\lim U^{(x)}=\Sigma u'_n$, la serie $\Sigma u'_n$ sarà convergente e si potrà trovare un numero m' dopo il quale sia sempre in valore assoluto $R'_m<\frac{\sigma}{3}$; preso poi un numero $m>m'$, si potrà anche trovare un numero corrispondente ε_1 tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon_1$ si abbia sempre in valore assoluto: $U^{(x)}-\Sigma u'_n<\frac{\sigma}{3}$, e $\sum_1^m(u_n^{(x)}-u'_n)<\frac{\sigma}{3}$; e allora per gli stessi valori di x, a causa della formola (8), si avrà anche evidentemente $R_m^{(x)}<\sigma$, talchè il teorema può dirsi ora completamente dimostrato.

96. L'ultima parte della dimostrazione precedente mostra anche che se $\lim U^{(x)} = \Sigma u'_n$, per *ogni* numero m superiore a un certo numero m' esisterà un numero ε_1 tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escl.) si abbia in valore assoluto $R_m^{(x)} < \sigma$.

Viceversa, se questo accade ripetendo i ragionamenti fatti per dimostrare il teorema del §. 94 si trova che $\lim U^{(x)} = \Sigma u'_n$; quindi si può evidentemente enunciare anche il seguente:

Teorema IV. *Se i termini di una serie Σu_n sono funzioni di x in un dato intervallo (α, β), o dipendono da una variabile x che può prendere un numero infinito di valori dei quali a è un punto limite, e se i limiti degli stessi termini per $x = a+0$ sono determinati e finiti, affinchè il limite della somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n per $x = a+0$ sia determinato e finito* e sia la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$, *è necessario e sufficiente che per ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ, e per* ogni *valore di m superiore a un dato numero abbastanza grande m' esista un numero ε* (variabile o nò con m) *tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$* (a escl.) *il resto $R_m^{(x)}$ della serie Σu_n sia numericamente minore di σ.*

Notiamo esplicitamente, a scanso di equivoci, che la condizione contenuta in questo teorema è condizione *necessaria* per l'esistenza del limite della somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n *quando* (come nel teorema) *si richiede anche che questo limite sia la somma della serie dei limiti* $\Sigma u'_n$, ma cessa però di esser tale quando, senza occuparsi della serie $\Sigma u'_n$, si richiede semplicemente che la somma $U^{(x)}$ abbia un limite determinato e finito, giacchè evidentemente, a causa della eguaglianza:

$$U^{(x_1)} - U^{(x_2)} = \sum_1^m (u_n^{(x_1)} - u_n^{(x_2)}) + R_m^{(x_1)} - R_m^{(x_2)},$$

l'esistenza del limite di $U^{(x)}$ porta soltanto che pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$, quando ε è sufficientemente piccolo, si abbia in valore assoluto $R_m^{(x_1)} - R_m^{(x_2)} < \sigma$.

97. Teorema V. *Se in un intorno comunque piccolo ma differente da zero $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ di un punto a i termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$*

sufficiente: 1.° che questa serie limite $\Sigma u'_n$ sia convergente: 2.° che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ e per ogni numero intero m' comunque grande si possano trovare due numeri ε e m dei quali il primo sia differente da zero e positivo e il secondo sia intero e maggiore di m' e tali che per tutti i valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.) il resto $R_m^{(x)}$ della serie Σu_n sia numericamente minore di σ.

Supponiamo infatti che la serie dei limiti $\Sigma u'_n$ sia convergente, e osserviamo che si ha:

$$(8) \qquad U^{(x)} - \Sigma u'_n = \sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n) + R_m^{(x)} - R'_m,$$

essendo R'_m il resto della serie dei limiti $\Sigma u'_n$. In questa formula m potrà supporsi maggiore del numero m' a partire dal quale, a causa della convergenza di $\Sigma u'_n$, si ha in valore assoluto $R'_m < \sigma$; quindi, osservando che quando è soddisfatta anche la seconda delle condizioni poste sopra si possono sempre trovare due numeri m ed ε pei quali $R_m^{(x)}$ per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.) sia anch'esso numericamente inferiore a σ, e poi, dopo di aver fissato così il valore di m, prendendo un numero $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ si potrà anche fare in modo che quando x è compreso fra a e $a+\varepsilon_1$ si abbia sempre in valore assoluto $\sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n) < \sigma$, si conclude subito che per questi valori di x si avrà sempre in valore assoluto $U^{(x)} - \Sigma u'_n < 3\sigma$, e perciò sarà $\lim U^{(x)} = \Sigma u'_n$.

Viceversa se $\lim U^{(x)} = \Sigma u'_n$, la serie $\Sigma u'_n$ sarà convergente e si potrà trovare un numero m' dopo il quale sia sempre in valore assoluto $R'_m < \frac{\sigma}{3}$; preso poi un numero $m > m'$, si potrà anche trovare un numero corrispondente ε_1 tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon_1$ si abbia sempre in valore assoluto: $U^{(x)} - \Sigma u'_n < \frac{\sigma}{3}$, e $\sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n) < \frac{\sigma}{3}$; e allora per gli stessi valori di x, a causa della formola (8), si avrà anche evidentemente $R_m^{(x)} < \sigma$, talchè il teorema può dirsi ora completamente dimostrato.

96. L'ultima parte della dimostrazione precedente mostra anche che se $\lim U^{(x)}=\Sigma u'_n$, per *ogni* numero m superiore a un certo numero m' esisterà un numero ε_1 tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escl.) si abbia in valore assoluto $R_m^{(x)}<\sigma$.

Viceversa, se questo accade ripetendo i ragionamenti fatti per dimostrare il teorema del §. 94 si trova che $\lim U^{(x)}=\Sigma u'_n$; quindi si può evidentemente enunciare anche il seguente:

Teorema IV. *Se i termini di una serie Σu_n sono funzioni di x in un dato intervallo (α, β), o dipendono da una variabile x che può prendere un numero infinito di valori dei quali a è un punto limite, e se i limiti degli stessi termini per $x=a+0$ sono determinati e finiti, affinchè il limite della somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n per $x=a+0$ sia determinato e finito* e sia la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$, *è necessario e sufficiente che per ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ, e per* ogni *valore di m superiore a un dato numero abbastanza grande m' esista un numero ε* (variabile o nò con m) *tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$* (a escl.) *il resto $R_m^{(x)}$ della serie Σu_n sia numericamente minore di σ.*

Notiamo esplicitamente, a scanso di equivoci, che la condizione contenuta in questo teorema è condizione *necessaria* per l'esistenza del limite della somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n *quando* (come nel teorema) *si richiede anche che questo limite sia la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$*, ma cessa però di esser tale quando, senza occuparsi della serie $\Sigma u'_n$, si richiede semplicemente che la somma $U^{(x)}$ abbia un limite determinato e finito, giacchè evidentemente, a causa della eguaglianza:

$$U^{(x_1)}-U^{(x_2)}=\sum_1^m (u_n^{(x_1)}-u_n^{(x_2)})+R_m^{(x_1)}-R_m^{(x_2)},$$

l'esistenza del limite di $U^{(x)}$ porta soltanto che pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$, quando ε è sufficientemente piccolo, si abbia in valore assoluto $R_m^{(x_1)}-R_m^{(x_2)}<\sigma$.

97. Teorema V. *Se in un intorno comunque piccolo ma differente da zero $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ di un punto a i termini $u_1, u_2,\ldots, u_n,\ldots$*

di una serie Σu_n *sono funzioni finite di* x *che nel punto* a *sono anche continue, e questa serie nello stesso intorno è convergente in ugual grado almeno semplicemente, la somma della serie* Σu_n *sarà una funzione di* x *finita e continua per* $x=a$.

Questo teorema risulta immediatamente dalla osservazione fatta in fine del §. 94, e risulta anche da quanto si disse nel §. 92 giacchè se $f(x)$ potesse esser discontinua per $x=a$, per quanto allora si disse, la serie Σu_n nell'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ non sarebbe convergente in ugual grado neppur semplicemente.

Osserviamo poi che per quanto si dimostrò nel §. 94, nel teorema ora enunciato si può fare a meno di porre a priori la condizione della convergenza della serie Σu_n per $x=a$, purchè però si sappia che in *tutti gli altri* punti dell'intorno $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ la serie stessa Σu_n è convergente in ugual grado in modo assoluto.

98. Dal teorema dimostrato risulta poi, come caso particolare il seguente:

Teorema VI. *Se i termini di una serie* Σu_n *sono funzioni di* x *finite e continue in tutto un intervallo* (α, β) *nel quale la serie stessa è convergente in ugual grado almeno semplicemente, anche la sua somma* $f(x)$ *sarà una funzione di* x *finita e continua in questo intervallo;* e ora per questo teorema si può anche affermare che: *Se una serie* Σu_n *è convergente in ugual grado almeno semplicemente in tutto un intervallo* (α, β), *la sua somma* $f(x)$ *in questo intervallo non potrà essere discontinua altro che in quei punti nei quali una o più delle funzioni* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *siano discontinue.*

99. Limitandosi poi al caso delle *serie* Σu_n *i cui termini, oltre essere funzioni finite e continue delle* x *in tutto l'intervallo* (α, β), *sono sempre positivi, almeno a partire da un certo valore finito di* n, si può dimostrare anche la proposizione reciproca di quella ora enunciata, facendo cioè vedere che *quando la loro somma è una funzione finita e continua della* x *queste serie sono convergenti in ugual grado in tutto l'intervallo* (α, β).

Si osservi infatti che se Σu_n è una serie per la quale sono soddisfatte le condizioni ora indicate, per ogni valore speciale di x fra α e β esisteranno infiniti numeri m maggiori di un dato numero m' e tali che i resti corrispondenti $R_n^{(x)}$ della serie data pel

valore x che si considera e per $n \geq m$ siano sempre numericamente inferiori a σ.

Fra questi infiniti numeri m potremo prendere il minimo che indicheremo con $m_{x,\sigma}$; e allora, lasciando invariato il σ, questo numero $m_{x,\sigma}$ acquisterà un significato determinato per ogni valore di x, e la quantità $\frac{1}{m_{x,\sigma}}$ potrà riguardarsi come una funzione finita e determinata di x per tutti i valori di x fra α e β.

Da ciò segue (§§. 15 e 36) che esisterà un limite inferiore μ pei valori di $\frac{1}{m_{x,\sigma}}$ nell'intervallo stesso (α, β), e esisterà pure fra α e β almeno un punto determinato x' dotato della proprietà che pei punti di ogni intorno di x' anche arbitrariamente piccolo il limite inferiore di $\frac{1}{m_{x,\sigma}}$ sia ancora μ.

Ora, siccome nel punto x' la serie Σu_n è convergente, si potrà trovare per essa un numero finito $m_1 > m'$ tale che per $n \geq m_1$ si abbia sempre $R_n(x') < \frac{\sigma}{3}$; quindi poichè si ha:

$$f(x'+\delta)-f(x')=\sum_1^{m_1}\{u_n(x'+\delta)-u_n(x')\}+R_{m_1}(x'+\delta)-R_{m_1}(x'),$$

osservando che, per la continuità di $f(x)$ e dei termini $u_n(x)$, esiste un intervallo $(x'-\varepsilon_1, x'+\varepsilon_2)$ nel quale si ha:

$$f(x'+\delta)-f(x')<\frac{\sigma}{3}, \quad \sum_1^{m_1}\{u_n(x'+\delta)-u_n(x')\}<\frac{\sigma}{3},$$

si conclude che in questo intervallo si avrà $R_{m_1}(x'+\delta)<\sigma$; e ora avendo riguardo anche alla condizione posta che i termini di Σu_n siano tutti positivi a partire da un certo valore di $n \geq m'$, si vede di quì che sarà: $R_n(x)<\sigma$ per tutti i valori di n non inferiori a m_1 e per tutti i punti x fra $x'-\varepsilon_1$ e $x'+\varepsilon_2$.

Ne segue che μ non sarà inferiore a $\frac{1}{m_1}$, e perciò $m_{x,\sigma}$ non sarà mai superiore a m_1, e questo evidentemente ci mostra appunto

che sotto le ipotesi fatte la serie Σu_n è convergente in ugual grado fra α e β e la nostra proposizione è dimostrata.

Come conseguenza poi del teorema ora dimostrato faremo notare che evidentemente esso può anche generalizzarsi col dire che: *Se Σu_n è una serie reale o complessa i cui termini sono funzioni finite e continue della x in tutto l'intervallo* (α, β) (gli estr. inclus.), *e oltre esser convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è tale altresì che la somma della serie dei moduli corrispondente $\Sigma u'_n$ è una funzione finita e continua della x in tutto l'intervallo, la serie stessa Σu_n sarà convergente in ugual grado nell'intervallo dato* (α, β).

100. Passando ora a occuparci della derivazione per serie, incomincieremo dall'osservare che i teoremi dei §§. 94, 95 e 96 danno subito luogo respettivamente ai seguenti:

Teorema VII. *Se in un intorno comunque piccolo ma differente da zero $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ di un punto a i termini $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ di una serie convergente Σu_n sono funzioni di x che per $x=a$ ammettono anche una derivata determinata e finita u'_n*, allora, *tutte le volte che pei punti $a+\delta$ che cadono nello stesso intorno* (a escl.) *la serie $\sum \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} \right\}$ è convergente in ugual grado, la somma $f(x)$ della serie Σu_n per $x=a$ avrà anch'essa una derivata determinata e finita che sarà la somma della serie $\Sigma u'_n$ delle derivate dei suoi termini.*

101. Teorema VIII. *Quando sono soddisfatte le condizioni precedenti intorno ai termini $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ della serie Σu_n nell'intorno $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ del punto a, affinchè la somma $f(x)$ di questa serie Σu_n per $x=a$ abbia una derivata determinata e finita e questa sia la somma della serie $\Sigma u'_n$ delle derivate di $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, è necessario e sufficiente: 1.° che questa serie $\Sigma u'_n$ delle derivate di u_n sia convergente: 2.° che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ e per ogni numero intero comunque grande m' si possano trovare due numeri ε ed m dei quali il primo sia differente da zero e positivo e il secondo sia intero e maggiore di m' e tali che la quantità $\frac{R_m(a+\delta)-R_m(a)}{\delta}$ per tutti i valori di δ numeri-*

camente inferiori ad ε *e pei quali il punto* $a+\delta$ *cade nell'intervallo* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *sia numericamente inferiore a* σ, essendo quì in generale indicato con $R_m(x)$ il resto della serie Σu_n pel valore x della variabile.

102. Teorema IX. *Sempre sotto le ipotesi precedenti,* si può anche dire che *affinchè la somma* $f(x)$ *della serie* Σu_n *per* $x=a$ *abbia una derivata determinata e finita e questa sia la somma della serie* $\Sigma u'_n$ *delle derivate di* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *è necessario e sufficiente che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo* σ, *e per ogni numero* m *superiore ad un numero intero abbastanza grande* m', *si possa trovare un numero positivo* ε (variabile o nò con m) *tale che la quantità* $\frac{R_m(a+\delta)-R_m(a)}{\delta}$ *per tutti i valori di* δ *numericamente inferiori a* ε *e pei quali il punto* $a+\delta$ *cade nell'intervallo* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *sia numericamente inferiore a* σ.

103. Oltre a questi teoremi poi è facile dimostrare anche il seguente:

Teorema X. *Affinchè la somma* $f(x)$ *di una serie* Σu_n *i cui termini soddisfano ancora alle condizioni precedenti, abbia una derivata determinata e finita per* $x=a$, *e questa sia la somma della serie* $\Sigma u'_n$ *delle derivate di* $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$ *è necessario e sufficiente: 1.° che questa serie* $\Sigma u'_n$ *delle derivate sia convergente: 2.° che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo* σ *si possa trovare un numero differente da zero e positivo* ε *tale che per ogni valore speciale di* δ *numericamente inferiore ad* ε *e pel quale il punto* $a+\delta$ *cade nell'intervallo* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *esista un numero finito* m *(variabile con* δ*) non inferiore a un numero dato* m' *e pel quale le tre quantità:* $\sum_1^m \left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u'_n\right\}$, $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, $\frac{R_m(a)}{\delta}$ *siano tutte numericamente inferiori a* σ.

Osserviamo infatti che se queste condizioni sono soddisfatte, siccome la serie $\Sigma u'_n$ è convergente, esisterà un numero finito m' tale che il resto R'_n di questa serie per $n \geq m'$ sia numericamente minore di σ; e quindi, poichè si può sempre porre:

$$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}-\Sigma u'_n=\sum_1^m\left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u'_n\right\}+$$
$$+\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}-\frac{R_m(a)}{\delta}-R'_m,$$

supponendo che m sia un numero maggiore di m' che pel valore di δ che si considera soddisfa alle condizioni dette sopra, si vedrà subito che in valore assoluto si ha $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}-\Sigma u'_n<4\sigma$ per tutti i valori di δ inferiori ad ε che possono considerarsi; e questo mostra intanto che, se le dette condizioni sono soddisfatte si ha $\lim\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}=\Sigma u'_n$.

Viceversa se $f(x)$ per $x=a$ ha una derivata finita e determinata che è la somma della serie $\Sigma u'_n$, questa serie sarà convergente; e oltre ad esistere un numero m' tale che per $m\geq m'$ si abbia in valore assoluto $R'_m<\frac{\sigma}{4}$, esisterà anche un numero ε differente da zero e positivo tale che per tutti i valori di δ numericamente inferiori ad ε che possono considerarsi la differenza $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}-\Sigma u'_n$ sia essa pure numericamente inferiore a $\frac{\sigma}{4}$. Osservando poi che, a causa della convergenza di Σu_n per tutti i valori di x fra $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$ che cadono nell'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$, per ognuno dei valori di δ che si considerano esiste evidentemente un numero *corrispondente* $m\geq m'$ pel quale le due quantità $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, $\frac{R_m(a)}{\delta}$ sono ambedue minori di $\frac{\sigma}{4}$, si conclude che per questi valori di δ e di m si ha anche numericamente $\sum_1^m\left\{\frac{u'_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u'_n\right\}<\sigma$, e con ciò il teorema resta completamente dimostrato.

104. Osserveremo inoltre che se i termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ godono anche della proprietà di ammettere una derivata finita e determinata in *tutto* un intorno sufficientemente piccolo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$

del punto a, lo stesso accade per tutte le somme $\sum_1^m u_n(x)$ qualunque sia m purchè finito, e quindi indicando con $u'_n(x)$ la derivata di $u_n(x)$, per tutti i valori di δ pei quali il punto $a+\delta$ cade in questo intorno si ha (§. 72, 5°):

$$\sum_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} \right\} = \frac{\sum_1^m u_n(a+\delta) - \sum_1^m u_n(a)}{\delta} = \left[\sum_1^m u'_n(x) \right]_{x=a+\theta\delta},$$

ovvero:

$$\sum_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u_n'(a) \right\} = \sum_1^m \left\{ u'_n(a+\theta\delta) - u'_n(a) \right\}$$

ove θ è un numero positivo compreso fra 0 e 1 che è lo stesso per tutti i termini della nostra somma ma che dipende da m e da δ; e così in questo caso la seconda delle condizioni del teorema precedente si può ridurre allora ad una condizione del tutto simile per le tre quantità $\sum_1^m \left\{ u'_n(a+\theta\delta) - u'_n(a) \right\}$, $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, $\frac{R_m(a)}{\delta}$.

105. Fondandosi poi sul teorema che precede si può ora dimostrare anche il seguente:

Teorema XI. *Se in ogni intorno sufficientemente piccolo* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *di un punto* a *una serie* Σu_n *è convergente e i suoi termini ammettono ciascuno una derivata finita e determinata, e se nello stesso intorno la serie* $\Sigma u'_n(x)$ *di queste derivate è convergente in ugual grado, allora anche la somma* $f(x)$ *delle serie* Σu_n *nel punto* a *avrà una derivata finita e determinata che sarà la somma della serie corrispondente delle derivate* $\Sigma u'_n(a)$.

Si osservi infatti che in questo caso la prima delle condizioni del teorema del §. 103 è soddisfatta, e s' indichi con m' un numero tale che per $m \geq m'$ e per tutti i valori di x fra $a-\varepsilon_1$ e $a+\varepsilon_2$ il resto $R'_n(x)$ della serie $\Sigma u'_n(x)$ sia numericamente minore di $\frac{\sigma}{8}$.

Per $m > m'$ si avrà in valore assoluto $\sum_{m'+1}^m u'_n(x) < \frac{\sigma}{4}$; quindi, osservando che si ha evidentemente:

$$\sum_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} = \sum_1^{m'} \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u'_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} +$$

$$+ \sum_{m'+1}^m \{u'_n(a+\theta\delta)-u'_n(a)\},$$

ove θ è un numero compreso fra 0 e 1 che dipeude da m e da δ e che è lo stesso in tutti i termini della somma $\sum\limits_{m'+1}^m$, si vede intanto che per tutti i valori di δ da $-\varepsilon_1$ a ε_2 e per tutti i valori di m superiori a m' l'ultima somma $\sum\limits_{m'+1}^m \{u'_n(a+\theta\delta)-u'_n(a)\}$ è numericamente minore di $\frac{\sigma}{2}$. D' altra parte per essere m' finito esiste sempre un numero ε tale che per tutti i valori di δ numericamente inferiori a ε si ha in valore assoluto

$\sum\limits_1^{m'} \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} < \frac{\sigma}{2}$, quindi si può intanto affermare che la somma $\sum\limits_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\}$ per *ogni valore di* m *non inferiore a* m' e per gli stessi valori di ε e di δ è numericamente minore di σ.

Si aggiunga ora che a causa della convergenza di Σu_n in tutto l'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$, per ognuno degli stessi valori di δ esiste un *corrispondente* valore di $m \geq m'$ pel quale le due quantità $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, $\frac{R_m(a)}{\delta}$ sono anch'esse numericamente inferiori a σ; si concluderà con ciò evidentemente che anche la seconda delle condizioni del teorema X è soddisfatta, e questo dimostra completamente il teorema enunciato.

106. Terminerò facendo osservare che quando la somma $f(x)$ della serie Σu_n per $x=a$ ha una derivata finita e determinata $f'(x)$ e la serie $\Sigma u'_n(a)$ è convergente ma non ha per somma $f'(a)$, evidentemente la seconda delle condizioni del teorema VIII e del teorema X non saranno soddisfatte. Similmente quando la deri-

vata di $f(x)$ per $x=a$ è infinita o indeterminata, una almeno delle condizioni degli stessi teoremi non potrà essere soddisfatta; e poichè resta per lo meno il dubbio che in questo caso possa ancora essere soddisfatta la prima e non esserlo la seconda, ben s'intende che il teorema di Duhamel che il Bertrand riporta alla pag. 271 del suo Calcolo differenziale potrebbe anche non esser vero in generale. E del resto anche la dimostrazione stessa che ne dà il Bertrand lascia in dubbio sulla sua esattezza in generale.

Similmente non possono per lo meno considerarsi come dimostrati in generale i teoremi sulla derivazione delle serie generali che ordinariamente si danno nei trattati di Calcolo differenziale e integrale. (V. p: es: SERRET. *Calc. diff. et int.* vol. II, pag. 100).

Principio della condensazione delle singolarità.

107. I teoremi sulle serie che ora abbiamo dati conducono alla dimostrazione rigorosa di un principio che Hankel denominò principio della condensazione delle singolarità, perchè con esso partendo da una funzione che presenta delle singolarità relative alla continuità, o alla derivata o ai massimi e minimi in un punto soltanto di un dato intervallo si giunge a costruire le espressioni analitiche di infinite funzioni che presentano le stesse singolarità in un numero infinito di punti di qualunque porzione dell'intervallo nel quale si considerano.

Sia $\varphi(y)$ una funzione che in tutto l'intervallo fra -1 e 1 (gli estr. incl.) tranne tutt'al più nel punto $y=0$ è continua e sempre numericamente inferiore a un dato numero finito, e per $y=0$ è zero.

La funzione $\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)$ pei valori di x che non sono della forma $\frac{m}{n}$ ove m è intero sarà finita e continua, e pei valori di x di questa forma sarà zero; quindi la serie

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s},$$

ove s è superiore ad uno, sarà convergente in ugual grado in un

intervallo qualunque (§. 93) e la sua somma sarà una funzione $f(x)$ di x sempre finita che per tutti i valori di x che non sono della forma $\frac{m}{n}$ ove m è intero, cioè pei valori irrazionali di x, è anche continua (§. 97); e se $\varphi(y)$ è continua anche per $y=0$, allora $f(x)$ sarà continua anche pei valori razionali di x.

108. Ora per vedere che cosa accada in $f(x)$ pei valori razionali di x quando $\varphi(y)$ è discontinua per $y=0$, osserviamo che, essendo $\varphi(0)=0$, se $\frac{\nu}{\mu}$ è un valore razionale di x, e ν e μ sono numeri interi primi fra loro si ha:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s},$$

ove la somma è estesa a tutti i valori di n che non sono multipli di μ; e quindi sarà:

$$(1)\quad f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s}+$$

$$+\frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi\left(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi\right)}{n^s},$$

ove la seconda somma del secondo membro è estesa a tutti i valori di n da 1 a ∞, e in $\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)$ deve prendersi il segno $+$ o il segno $-$ secondochè $n\nu$ è pari o dispari; e poichè la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s}$ è una funzione di x che per $x=\frac{\nu}{\mu}$ è continua (§. 97), dentemente la prima serie del secondo membro avrà per limite zero per $\delta=0$, e quindi basterà ora occuparsi della seconda.

109. Distinguiamo perciò il caso in cui le discontinuità che $\varphi(y)$ ha per $y=0$ da una o da tutte e due le parti di questo punto sono discontinuità ordinarie, e il caso in cui queste discontinuità almeno da una parte sono di quelle che si dissero di seconda specie.

Nel primo caso, passando al limite per $\delta=0$ si ha subito (§. 94):

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+0\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\frac{\varphi(\pm 0)}{\mu^s}\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)^s}+\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n)^s},$$

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}-0\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\frac{\varphi(\mp 0)}{\mu^s}\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)^s}+\frac{\varphi(-0)}{\mu^s}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n)^s}$$

ove in $\varphi(\pm 0)$ e $\varphi(\mp 0)$ devono prendersi i segni superiori o gl'inferiori secondochè ν è pari o dispari; quindi per ν pari e $=2\nu'$ si avrà:

$$f\left(\frac{2\nu'}{\mu}+0\right)-f\left(\frac{2\nu'}{\mu}\right)=\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty\frac{1}{n^s},$$

$$f\left(\frac{2\nu'}{\mu}-0\right)-f\left(\frac{2\nu'}{\mu}\right)=\frac{\varphi(-0)}{\mu^s}\sum_1^\infty\frac{1}{n^s},$$

e per ν dispari e $=2\nu'+1$ si avrà invece:

$$f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu}+0\right)-f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu}\right)=\frac{\varphi(-0)}{\mu^s}\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)^s}+\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n)^s},$$

$$f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu}-0\right)-f\left(\frac{2\nu'+1}{\mu}\right)=\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)^s}+\frac{\varphi(-0)}{\mu^s}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n)^s}$$

e poichè, delle quantità $\varphi(+0)$ e $\varphi(-0)$, che rappresentano evidentemente i salti della funzione $\varphi(y)$ a destra e a sinistra del punto $y=0$, la prima o la seconda o tutte e due sono respettivamente differenti da zero o uguali a zero secondochè in $\varphi(y)$ a destra o a sinistra del punto $y=0$ o dalle due parti si ha discontinuità o continuità, si conclude che nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali il numeratore ν è pari $f(x)$ avrà sempre una discontinuità ordinaria che sarà da ambedue le parti del punto o da una sola (destra o sinistra) secondochè la discontinuità che si ha in $\varphi(y)$ per $y=0$ è da tutte e due le parti di questo punto o da una sola

(destra pure o sinistra); e nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali il numeratore è dispari, tanto che $\varphi(y)$ sia discontinua per $y=0$ da una parte soltanto quanto che lo sia da tutte e due, la funzione $f(x)$ avrà sempre una discontinuità ordinaria da tutte e due le parti del punto, a meno che non sia soddisfatta una delle due uguaglianze:

$$\varphi(-0)\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \varphi(+0)\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s} = 0,$$

$$\varphi(+0)\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} + \varphi(-0)\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s} = 0,$$

nel qual caso, non potendo evidentemente queste due eguaglianze essere soddisfatte insieme perchè per $s>1$ si ha:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^s} = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = (2^s-1)\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s},$$

la discontinuità che si avrà in $f(x)$ sarà soltanto da una parte del punto. Quest'ultimo caso però non può presentarsi che quando la discontinuità che si ha in $\varphi(y)$ per $y=0$ sia dalle due parti del punto stesso $y=0$.

E se la discontinuità che si avrà in $\varphi(y)$ per $y=0$ sarà di quelle che possono togliersi mutando il valore della funzione in quel punto (cioè se $\varphi(+0)=\varphi(-0)$), altrettanto accadrà delle discontinuità che si avranno in $f(x)$ nei vari punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$, e i salti che essa farà in questi punti saranno uguali a $\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$; e si può notare che tali discontinuità in $f(x)$ non potranno presentarsi che in questo caso.

Inoltre osserveremo che quando sia $\varphi(+0) = -\varphi(-0)$, e in questo caso soltanto, il valore $f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$ di $f(x)$ nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ è sempre il valore medio fra i due $f\left(\frac{\nu}{\mu}+0\right)$ e $f\left(\frac{\nu}{\mu}-0\right)$,

e allora il salto dalle due parti del punto per ν pari è $\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$,
e per ν dispari è $\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\frac{\varphi(+0)}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$; e osserveremo infine che in ogni caso i salti che la funzione $f(x)$ fa nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ non dipendono che dal valore del denominatore μ e dall'esser pari o dispari il numeratore ν, e col crescere di μ vanno impiccolendo oltre ogni limite; talchè la stessa funzione $f(x)$ in ogni caso è una di quelle funzioni punteggiate discontinue che in ogni intervallo finito hanno soltanto un numero finito di punti nei quali fanno salti maggiori di una quantità qualunque arbitrariamente piccola data.

110. Ci resta ora da considerare il caso in cui $\varphi(y)$ almeno da una parte del punto $y=0$ ha una discontinuità di seconda specie, e per questo procederemo come segue.

Supponiamo subito, per semplicità, $s>2$, e osserviamo che se in una serie $\sum_1^\infty \frac{A_n}{n^s}$ le A_n non possono superare in valore assoluto una quantità finita g, per $n\geq 1$ si ha in valore assoluto:

$$R_n < \frac{g}{(n+1)^{s-2}}\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{g}{(n+1)^{s-2}}\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{n(n-1)}$$

ovvero:

$$R_n < \frac{g}{n(n+1)^{s-2}} < \frac{g}{n^{s-1}},$$

e perciò si può porre:

$$R_n = \frac{hg}{n(n+1)^{s-2}} = \frac{h'g}{n^{s-1}}, \tag{2}$$

essendo h e h' quantità comprese fra -1 e 1.

Per questo si potrà sempre scrivere:

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s} = \varphi\left[(-1)^\nu \operatorname{sen}\mu\delta\pi\right] + \frac{hg}{2^{s-2}},$$

essendo g il limite superiore dei valori di $\varphi(y)$ fra -1 e 1; e di quì risulta subito intanto che se $\varphi(y)$ per $y=0$ avrà una discontinuità di seconda specie dalle due parti dello stesso punto, e se s sarà così grande che la quantità $\frac{g}{2^{s-2}}$ sia inferiore alla metà delle oscillazioni che $\varphi(y)$ fà in vicinanza del punto $y=0$ e dalle due parti di questo punto (§. 32), la funzione $f(x)$ in tutti i punti razionali e dalle due parti di questi punti avrà discontinuità di seconda specie; e se $\varphi(y)$ avrà una discontinuità di seconda specie soltanto da una parte del punto $y=0$, e dall'altra parte di questo punto sarà continua o avrà soltanto una discontinuità ordinaria, allora nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari a destra e a sinistra avverrà sempre per $f(x)$ quel che avviene per $\varphi(y)$ a destra o a sinistra del punto $y=0$. Nei punti razionali poi $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari osservando che si ha:

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s} = \sum_0^\infty \frac{\varphi\left[-\operatorname{sen}(2n+1)\mu\delta\pi\right]}{(2n+1)^s} + \frac{1}{2^s}\sum_1^\infty \frac{\varphi(\operatorname{sen} 2n\mu\delta\pi)}{n^s},$$

e

$$\sum_0^\infty \frac{\varphi\left[-\operatorname{sen}(2n+1)\mu\delta\pi\right]}{(2n+1)^s} = \varphi(-\operatorname{sen}\mu\delta\pi) + \frac{hg}{3^{s-2}},$$

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\operatorname{sen} 2r\mu\delta\pi)}{n^s} = \varphi(\operatorname{sen} 2\mu\delta\pi) + \frac{h'g}{2^{s-2}},$$

si vedrà subito che per s abbastanza grande in $f(x)$ si avrà sempre discontinuità di seconda specie dalle due parti del punto $\frac{\nu}{\mu}$; quindi si può ora affermare che anche nel caso in cui le discontinuità di $\varphi(y)$ almeno da una parte nel punto $y=0$ siano discontinuità di seconda specie, per valori abbastanza grandi di s $f(x)$ sarà discontinua in tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$, e per quelli fra questi

punti pei quali ν è dispari la discontinuità sarà sempre di seconda specie dalle due parti, mentre per quelli pei quali ν è pari la discontinuità di $f(x)$ avrà le stesse particolarità che ha quella di $\varphi(x)$ per $y=0$.

E osservando inoltre che il secondo termine della formula (1) ha il divisore μ^s, si potrà dire che anche nel caso attuale $f(x)$ sarà una di quelle funzioni punteggiate discontinue che in ogni intervallo finito hanno soltanto un numero finito di punti nei quali fanno salti maggiori di una quantità qualunque arbitrariamente piccola data.

111. Supponiamo ora che la funzione $\varphi(y)$ sia sempre continua fra -1 e 1, e in tutti i punti di questo intervallo, escluso tutt'al più il punto $y=0$, abbia anche una derivata determinata e sempre numericamente inferiore a una quantità finita g, e supponiamo inoltre $s>2$. Allora la funzione $f(x)$ sarà sempre finita e continua, e se anche nel punto $y=0$ $\varphi(y)$ avrà una derivata determinata, questa derivata sarà necessariamente finita (§. 77. 1.°) e non superiore a g, e le derivate dei termini della serie $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s}$ saranno finite e determinate per *qualunque* valore di x e di n, e formeranno una serie sempre convergente $\pi\sum_1^\infty \frac{\varphi'(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$.

Inoltre questa serie $\pi\sum_1^\infty \frac{\varphi'(\pm\operatorname{sen} nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$ sarà convergente in ugual grado per tutti i valori di x (§. 93) perchè i suoi termini sono numericamente inferiori ai termini corrispondenti della serie convergente $\pi\sum_1^\infty \frac{g}{n^{s-1}}$; quindi si può asserire (§. 105) che in questo caso in cui $\varphi(y)$ ha una derivata determinata e finita anche nel punto $y=0$ la nostra funzione $f(x)$ ha una derivata finita e determinata per tutti i valori di x, e questa derivata è appunto la somma della serie delle derivate $\pi\sum \frac{\varphi'(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$.

112. Supponiamo ora che $\varphi(y)$ per $y=0$ non abbia una derivata determinata, ammettendo però sempre che fuori di questo

punto $y=0$ le derivate di $\varphi(y)$ siano ancora determinate e numericamente inferiori a una quantità finita data g, e cerchiamo che cosa accada allora per la derivata di $f(x)$.

Per questo osserviamo che in questo caso il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ coll'avvicinarsi indefinitamente di δ a zero, almeno da una parte, non avrà un limite determinato, ma i suoi valori si manterranno sempre fra limiti finiti (§. 75); e osserviamo inoltre che, siccome pei valori irrazionali di x le derivate dei termini $\frac{\varphi(\text{sen}\, nx\pi)}{n^s}$ sono determinate e finite, la serie di queste derivate $\pi\sum_1^\infty \frac{\varphi'(\text{sen}\, nx\pi)}{n^{s-1}}\cos nx\pi$ pei valori irrazionali di x sarà convergente.

Si consideri ora la serie $\sum_1^\infty \frac{\varphi\{\text{sen}\, n(x+\delta)\pi\} - \varphi(\text{sen}\, nx\pi)}{n^s\delta}$ per tutti i valori di δ diversi da zero, e pei valori irrazionali di x; si vedrà subito che i termini di questa serie quando non corrispondono a valori di n pei quali si abbia $\text{sen}\, n(x+\delta)\pi = \text{sen}\, nx\pi$ (nel qual caso però sono nulli) si possono porre sotto la forma:

$$\frac{\pi}{n^{s-1}}\,\frac{\varphi\left[\text{sen}\, n(x+\delta)\pi\right] - \varphi(\text{sen}\, nx\pi)}{\text{sen}\, n(x+\delta)\pi - \text{sen}\, nx\pi}\cos n\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\pi\,\frac{\text{sen}\, n\frac{\delta}{2}\pi}{n\frac{\delta}{2}\pi};$$

quindi, siccome per l'osservazione 7.ª del §. 72 il fattore $\frac{\varphi\left[\text{sen}\, n(x+\delta)\pi\right] - \varphi(\text{sen}\, nx\pi)}{\text{sen}\, n(x+\delta)\pi - \text{sen}\, nx\pi}$ è sempre numericamente minore di g, e il fattore $\cos n\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\pi\,\frac{\text{sen}\, n\frac{\delta}{2}\pi}{n\frac{\delta}{2}\pi}$ non supera l'unità, gli stessi termini in valore assoluto saranno inferiori a $\frac{\pi g}{n^{s-1}}$, e perciò la serie stessa $\sum_1^\infty \frac{\varphi\left[\text{sen}\, n(x+\delta)\pi\right] - \varphi(\text{sen}\, nx\pi)}{n^s\delta}$ pei valori di δ diversi da zero (avendo i suoi termini tutti numericamente inferiori ai termini corrispondenti della serie convergente $\sum_1^\infty \frac{\pi g}{n^{s-1}}$) sarà con-

vergente in ugual grado; quindi pel teorema del §. 100 si può concludere intanto che la funzione $f(x)$ per tutti i valori irrazionali di x ha ancora una derivata finita e determinata che è la somma della serie corrispondente delle derivate

$\sum_1^\infty \frac{\varphi'(\mathrm{sen}\, nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$; talchè basterà ora cercare che cosa accade pei valori razionali di x.

Per questo incominciamo dall'osservare che per $x=\frac{\nu}{\mu}$, essendo ν e μ numeri interi primi fra loro, si ha dalla formola (1):

$$(3)\quad \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}=\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\frac{\varphi\left[\mathrm{sen}\, n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\mathrm{sen}\, n\frac{\nu}{\mu}\right)}{n^{s}\delta}+$$
$$+\frac{1}{\mu^{s}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\mathrm{sen}\, n\mu\delta\pi)}{n^{s}\delta},$$

ove in $\varphi(\pm\mathrm{sen}\, n\mu\delta\pi)$ deve prendersi il segno $+$ o il segno $-$ secondochè $n\nu$ è pari o dispari; e siccome col ragionamento precedente si trova che la serie $\sum_1^\infty{}_\mu \frac{\varphi(\mathrm{sen}\, nx\pi)}{n^s}$ ha una derivata finita e determinata anche per $x=\frac{\nu}{\mu}$, e questa derivata è la somma della serie $\pi\sum_1^\infty{}_\mu \frac{\varphi'\left(\mathrm{sen}\, n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$, indicando con σ_1 una quantità che pei valori di δ numericamente inferiori a una quantità positiva sufficientemente piccola ε è minore di quella quantità che più ci piace, si potrà scrivere intanto:

$$(4)\quad \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}=\pi\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\frac{\varphi'\left(\mathrm{sen}\, n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi+\sigma_1+$$
$$+\frac{1}{\mu^{s}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\mathrm{sen}\, n\mu\delta\pi)}{n^{s}\delta},$$

e quindi basterà ora occuparsi della serie: $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \text{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$

Supponiamo perciò dapprima che la derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$ non esista per la ragione che i limiti dei due rapporti $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, $\frac{\varphi(-\delta)}{-\delta}$ per $\delta=+0$ sebbene determinati e finiti non sono uguali; o, in altri termini, ammettiamo che $\varphi(y)$ per $y=0$ abbia delle derivate a destra e a sinistra finite e determinate, ma differenti l'una dall'altra, e queste derivate siano respettivamente $\varphi'(+0)$ e $\varphi'(-0)$.

Allora i termini della serie $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \text{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$ per $\delta=0$ a destra, e per $\delta=0$ a sinistra avranno limiti determinati e finiti, e siccome si ha:

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \text{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta} = \sum_0^\infty \frac{\varphi[(-1)^\nu \text{sen}(2n+1)\mu\delta\pi]}{(2n+1)^s\delta} + \sum_1^\infty \frac{\varphi(\text{sen} 2n\mu\delta\pi)}{(2n)^s},$$

si vedrà subito (§. 94)che per ν pari si ha:

$$\lim_{\delta=+0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_1^\infty \mu \frac{\varphi'\left(\text{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi + \frac{\varphi'(+0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}},$$

$$\lim_{\delta=-0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_1^\infty \mu \frac{\varphi'\left(\text{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi + \frac{\varphi'(-0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}},$$

e per ν dispari si ha invece:

$$\lim_{\delta=+0} \frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} = \pi \sum_1^\infty \mu \frac{\varphi'\left(\text{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}} \cos n\frac{\nu}{\mu}\pi -$$

$$- \frac{\varphi'(-0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^{s-1}} + \frac{\varphi'(+0)\pi}{\mu^{s-1}} \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^{s-1}}$$

$$\lim_{\delta=-0}\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}=\pi\sum_1^\infty \mu\frac{\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi-$$

$$-\frac{\varphi'(+0)\pi}{\mu^{s-1}}\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)^{s-1}}+\frac{\varphi'(-0)\pi}{\mu^{s-1}}\sum_1^\infty\frac{1}{(2n)^{s-1}}$$

talchè si può dire intanto che nel caso attuale nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ corrispondenti a ν pari la indeterminazione della derivata di $f(x)$ sarà dello stesso genere di quella che si ha nella derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$, cioè esisteranno tanto le *derivate a destra* che quelle a *sinistra* di questi punti, ma saranno differenti le une dalle altre; e lo stesso accadrà anche pei punti razionali corrispondenti a valori dispari di ν giacchè non può essere $\varphi'(+0)=\varphi'(-0)$.

Se poi l'indeterminazione nella derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$ proviene dalla circostanza che il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ coll'avvicinarsi di δ a zero almeno da una parte non ha un limite determinato, allora si può vedere che, se s sarà abbastanza grande, nella derivata di $f(x)$ si avrà ancora una indeterminazione dello stesso genere per tutti i valori razionali di x.

Osservando infatti che i termini della serie $\sum_1^\infty\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$ nei quali $n\mu\delta$ è un numero intero sono tutti uguali a zero, e gli altri possono porsi sotto la forma $\frac{\pm\mu\pi}{n^{s-1}}\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi}\frac{\operatorname{sen} n\mu\delta\pi}{n\mu\delta\pi}$ e il rapporto $\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta)}{\pm\operatorname{sen} n\mu\delta}$ è sempre numericamente minore di una quantità finita g, mentre l'altro $\frac{\operatorname{sen} n\mu\delta\pi}{n\mu\delta\pi}$ non supera numericamente l'unità, si vedrà subito per la (2) che:

$$\sum_2^\infty\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}=\frac{\mu\pi g h}{2^{s-3}}$$

ove h è una quantità compresa fra — 1 e 1, e perciò si avrà per tutti i valori di δ diversi da zero:

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta} = \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} \mu\delta\pi)}{\delta} + \frac{\mu\pi g h}{2^{s-3}},$$

ciò che ci mostra intanto che se le indeterminazioni nel limite del rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ si hanno dalle due parti di $\delta=0$, e se s sarà sufficientemente grande, le stesse indeterminazioni si avranno nella serie $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$, e quindi anche nel rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ per tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$, e così in questi punti $f(x)$ non avrà derivata determinata nè a destra nè a sinistra.

Se poi il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ manca ancora di un limite determinato per $\delta=0$ ma soltanto da una parte, allora spezzando in due parti la serie $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$ come si fece in un caso analogo per le discontinuità, (§. 110) si vede subito che pei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari avviene per il limite del rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ ciò che avviene per il limite del rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, e quindi la derivata di $f(x)$ esiste solo da una parte di questi punti; mentre pei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari, almeno quando s è abbastanza grande, il rapporto stesso $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ non ha limite determinato nè a destra nè a sinistra del punto $\frac{\nu}{\mu}$, e quindi la

funzione $f(x)$ non ha derivata determinata nè a destra nè a sinistra di questi punti, e il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ oscilla sempre fra limiti finiti quando δ si avvicina sempre più a zero.

113. Prendiamo ora a considerare il caso in cui la derivata di $\varphi(y)$ sebbene sempre finita e determinata fuori del punto $y=0$, col tendere di $y=0$ in alcuni punti prende anche valori numericamente maggiori di qualunque quantità data (ciò che p. es. è sempre necessario §. 77 1.° quando la derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$ deve essere infinita almeno da una parte).

In questo caso la derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$ potrà ancora (§§. 75 e seg.) essere determinata e finita o essere infinita e determinata o nò di segno, o essere indeterminata tutt'affatto, e noi ci proponiamo ora di vedere che cosa accada della derivata di $f(x)$ in questi singoli casi.

In questi casi pei punti x irrazionali non può più dimostrarsi, almeno in generale, l'esistenza della derivata di $f(x)$, perchè siccome nx col crescere indefinito di n passa anche per valori prossimi quanto si vuole a numeri interi, le derivate $\varphi'(\text{sen}\, nx\pi)$ possono non mantenersi più sempre numericamente inferiori a una quantità finita e quindi non sono più applicabili i ragionamenti fatti nel §. 112; pei punti razionali poi possiamo ragionare come segue.

Osserviamo che anche in questo caso si ha la formula (3), e prendiamo subito a studiare la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\text{sen}\, nx\pi)}{n^s}$, cercando di dimostrare coll' applicazione del teorema del §. 103, che a questa serie per $x=\frac{\nu}{\mu}$ può applicarsi la derivazione termine a termine.

Si osservi perciò dapprima che i termini di questa serie per $x=\frac{\nu}{\mu}$ hanno una derivata finita e determinata $\frac{\pi\varphi'\left(\text{sen}\, n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}}$; si vedrà subito che la serie di queste derivate è ancora convergente, e quindi resterà solo a cercarsi se si può soddisfare alla seconda delle condizioni del teorema citato.

Per questo prendiamo per m il primo numero intero che non è inferiore a δ_1^{-q}, essendo δ_1 il valore assoluto di δ, e q essendo un numero positivo scelto in modo da soddisfare alla condizione $1 > q > \frac{1}{s-1}$ (ciò che evidentemente può farsi perchè $s > 2$), e osserviamo che allora si ha in valore assoluto $\delta\, m^{s-1} \geq \delta_1^{1-q(s-1)}$, e $m\delta = \delta_1^{1-q} + \theta\delta_1$ con θ compreso fra 0 e 1 (1 escl.); si vedrà subito per la (2) che se $R_n(x)$ è il resto della serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\operatorname{sen} n x \pi)}{n^s}$ pel valore x della variabile, e g è il massimo valore assoluto di $\varphi(y)$ fra -1 e 1, si ha in valore assoluto:

$$\frac{R_m\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)}{\delta} < g\delta_1^{q(s-1)-1}, \quad \frac{R_m^{-}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta} < g\delta_1^{q(s-1)-1},$$

e quindi se per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ si prende ε in modo che si abbia $g\varepsilon^{q(s-1)-1} < \sigma$, allora per *ogni valore speciale* di δ numericamente inferiore ad ε basterà determinare un numero intero m nel modo indicato sopra, per far sì che le quantità $\frac{R_m\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)}{\delta}$, e $\frac{R\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ siano ambedue numericamente minori di σ; e questo numero m, quando si prenda ε sufficientemente piccolo, sarà anche sempre maggiore di quel numero che più ci piace m'.

Ora, se ε sarà preso sufficientemente piccolo, è facile vedere che quando m per ogni valore speciale di δ numericamente inferiore ad ε sia determinato nel modo testè indicato, anche la quantità:

$$(5) \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \left\{ \frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right] - \varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta} - \frac{\pi\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}} \right\}$$

sarà numericamente inferiore a σ per tutti questi valori di δ, e quindi saranno soddisfatte tutte le condizioni necessarie e sufficienti perchè alla serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{\varphi(\operatorname{sen} n x \pi)}{n^s}$ per $x = \frac{\nu}{\mu}$ possa applicarsi la derivazione termine a termine.

Indichiamo infatti con m_1 un numero tale che per $n \geq m_1 - 1$ il resto R_n della serie $\sum_1^\infty \mu \frac{1}{n^{s-1}}$ sia minore di una quantità arbitrariamente piccola σ'. Il numero m, come abbiamo detto sopra, potrà supporsi superiore anche a questo numero m_1 per tutti i valori di δ, e la somma precedente (5) potrà in conseguenza spezzarsi nelle due $\sum_1^{m_1-1} \mu$, $\sum_{m_1}^{m} \mu$; e poichè, quando sia preso ε sufficientemente piccolo, la prima di queste somme (essendo composta di un numero finito e fisso di termini) per tutti i valori di δ fra $-\varepsilon$ e ε sarà numericamente inferiore a quella quantità che più ci piace σ, basterà che ci occupiamo ora della seconda.

Per questo osserviamo che la quantità $\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)$ per tutti i valori interi di n che non sono multipli di μ è sempre inferiore a una quantità finita g' perchè $n\frac{\nu}{\mu}$ non si accosterà mai ad un numero intero più di $\frac{1}{\mu}$; e siccome si ha in valore assoluto $m\delta = \delta_1^{1-q} + \theta\delta_1 < \varepsilon^{1-q} + \varepsilon$, se si suppone ε tanto piccolo che $\varepsilon^{1-q} + \varepsilon$ non giunga a $\frac{1}{2\mu}$, le quantità $n\frac{\nu}{\mu}$, $n\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)$ per tutti i valori interi di n che non sono multipli di μ e non sono superiori ad m saranno vicinissime e non saranno mai intere nè comprenderanno fra loro numeri interi e anzi ne saranno discoste più di $\frac{1}{2\mu}$; e quindi evidentemente per le ipotesi fatte la funzione $\varphi(y)$ per tutti i valori di y compresi fra $\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi$ e $\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)\pi$ quando n ha valori interi non multipli di μ e non superiori ad m, avrà sempre una derivata determinata e numericamente inferiore a una quantità finita g''. Ne segue (§. 72, .6.°) che il rapporto

$$\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu} + \delta\right)\pi\right] - \varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta}$$ che al solito quando non è zero

può porsi sotto la forma:

$$\frac{\pi}{n^{s-1}}\,\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi-\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi}\cos n\left(\frac{\nu}{\mu}+\frac{\delta}{2}\right)\pi\,\frac{\operatorname{sen}\frac{n\delta\pi}{2}}{\frac{n\delta\pi}{2}},$$

sarà numericamente inferiore a $\frac{\pi g''}{n^{s-1}}$, e si avrà perciò in valore assoluto:

$$\sum_{m_1}^{m}{}_{\mu}\left\{\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta}-\frac{\pi\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}}\right\}$$

$$<\pi(g'+g'')\sum_{m_1}^{m}{}_{\mu}\frac{1}{n^{s-1}}<\pi(g'+g'')\sigma',$$

e questo mostra appunto che anche la somma del primo membro, per ε sufficientemente piccolo e per tutti i valori di δ compresi fra $-\varepsilon$ e ε, sarà numericamente inferiore a quella quantità che più ci piace σ''.

Da ciò risulta, come abbiamo già detto, che lo stesso accadrà della somma:

$$\sum_{1}^{m}{}_{\mu}\left\{\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s\delta}-\frac{\pi\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi}{n^{s-1}}\right\};$$

quindi poichè con ciò resta dimostrato che tutte le condizioni del teorema del §. 103 sono soddisfatte, si conclude ora che la funzione $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s}$ per $x=\frac{\nu}{\mu}$ ha una derivata finita e determinata che è la somma della serie $\pi\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$; e si vede perciò che indicando con σ_1 una quantità che pei valori di δ numericamente inferiori a un numero positivo e sufficientemente piccolo ε è minore di quella quantità che più ci piace, la formola (3) potrà anche in questo caso ridursi alla seguente:

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}=\pi\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi+\sigma_1+\frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta},$$

che non è altro che la formula (4) del paragrafo precedente; e basterà quindi occuparsi della serie: $\sum_1^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$.

Si decomponga perciò questa serie nelle due somme:

$$\sum_1^m \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}, \quad \sum_{m+1}^\infty \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta},$$

essendo m un numero che per ogni valore speciale di δ numericamente inferiore a una quantità sufficientemente piccola ε è determinato nel modo che indicammo sopra. Allora, applicando la formola (2) si vedrà subito che la seconda di queste somme, quando ε sia preso abbastanza piccolo, per tutti i valori di δ che si considerano sarà numericamente inferiore a quella quantità che più ci piace, e basterà quindi limitarsi a considerare la prima somma: $\sum_1^m \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s\delta}$.

Scriviamo perciò questa somma sotto la forma:

$$\mu\pi \sum_1^m \pm \frac{1}{n^{s-1}} \frac{\varphi(\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{\pm \operatorname{sen} n\mu\delta\pi} \frac{\operatorname{sen} n\mu\delta\pi}{n\mu\delta\pi}, \tag{6}$$

e supponiamo dapprima che $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ per $\delta=0$ da una parte abbia per limite $+\infty$ e dall'altra $-\infty$; o, in altri termini, supponiamo che la derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$ da una parte p: es: a destra sia $+\infty$, e dall'altra sia $-\infty$.

Ricordando che nei termini della somma precedente deve prendersi il segno superiore o l'inferiore secondochè $n\nu$ è pari o dispari, e supponendo ε talmente piccolo che la quantità $m\delta$ (che è numericamente inferiore ad $\varepsilon^{1-q}+\varepsilon$) sia essa pure numericamente inferiore a un numero arbitrariamente piccolo, si vedrà subito che i termini della stessa somma per δ positivo avranno tutti uno stesso segno, e per δ negativo avranno pure uno stesso segno, contrario però a quello che essi hanno per δ positivo, e almeno i primi fra essi, per tutti i valori di δ che si considerano, saranno numericamente maggiori di quella quantità che più ci

piace; quindi evidentemente in questo caso qualunque sia il punto razionale $\frac{\nu}{\mu}$ il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ per $\delta=0$ da una parte avrà per limite $+\infty$ e dall'altra $-\infty$, e così la derivata di $f(x)$ per $x=\frac{\nu}{\mu}$ da una parte sarà $+\infty$ e dall'altra $-\infty$.

Se poi $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ per $\delta=0$ da tutte e due le parti ha per limite $+\infty$ o ha per limite $-\infty$, allora si vede in modo simile che pei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ presenterà le stesse circostanze del rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, ma non si potrà dire nulla pei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari, perchè per questi punti i termini della somma (6) verranno alternativamente positivi o negativi; e se infine da una parte del punto $\delta=0$, il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ ha per limite $+\infty$ o $-\infty$ e dall'altra parte ha per limite una quantità finita e determinata o oscilla fra limiti finiti, allora con osservazioni analoghe a quelle che si fecero nel §. 112 si vede subito che, se s è abbastanza grande, pei punti $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ presenta le stesse singolarità del rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$, e pei punti $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari il rapporto stesso per $\delta=0$ da una parte ha per limite $+\infty$ e dall'altra ha per limite $-\infty$.

E infine se la funzione $\varphi(y)$ nel punto $y=0$ avrà una derivata determinata e finita, con osservazioni analoghe sulla somma (6) si troverà che la funzione $f(x)$ in tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ avrà

pure una derivata determinata e finita che sarà la somma della serie delle derivate $\pi\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi'\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^{s-1}}\cos n\frac{\nu}{\mu}\pi$; e se nel punto $y=0$ $\varphi(y)$ non avrà derivata determinata sia perchè i limiti di $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ per $\delta=0$ a destra e a sinistra sebbene determinati e finiti non siano uguali, sia perchè almeno da una parte questo rapporto oscilli fra limiti che supporremo finiti, allora $f(x)$ nel primo caso per tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ presenterà le stesse circostanze di $\varphi(y)$, e nel secondo presenterà ancora le stesse circostanze di $\varphi(y)$ per tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari, e almeno quando s sia abbastanza grande sarà tale che il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ oscillerà fra limiti finiti dalle due parti di $\delta=0$ per tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari.

Notiamo che restano così estesi i resultati che si ebbero ai §§. 111 e 112 pel caso che le derivate di $\varphi(y)$ fuori del punto $y=0$ fossero sempre numericamente inferiori ad una quantità finita; però a differenza di quanto si potè fare nei §§. 111 e 112 resta quì incerta l'esistenza delle derivate di $f(x)$ nei punti irrazionali. E resta pure incerto ciò che avvenga per la derivata di $f(x)$ nei punti razionali e irrazionali quando il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ pel tendere di δ a zero almeno da una parte oscilla fra limiti infinitamente discosti.

114. Riassumendo ora i risultati precedenti, si possono enunciare i seguenti teoremi generali che costituiscono in sostanza *il principio* detto da Hankel *della condensazione delle singolarità,* enunciato qui sotto una forma più rigorosa e più completa.

" 1.° Se $\varphi(y)$ è una funzione che in tutto l'intervallo da -1 a 1,
" escluso il punto zero, è continua e sempre numericamente infe-

" riore a un dato numero finito e nel punto zero è uguale a zero
" ed è discontinua, la funzione:

$$(7) \qquad f(x) = \sum_1^\infty \frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s},$$

" per valori di s maggiori di uno e abbastanza grandi, in un
" intervallo qualunque è una funzione punteggiata discontinua
" che è sempre numericamente inferiore a un dato numero finito e
" che in tutti i punti irrazionali dello stesso intervallo è continua
" e in tutti i punti razionali è discontinua; e il numero dei salti
" maggiori di un numero positivo arbitrariamente piccolo σ che
" essa fa nello stesso intervallo è sempre finito (§§. 109 e 110).
" Inoltre le discontinuità che questa funzione $f(x)$ ha nei punti
" razionali in confronto a quelle che $\varphi(y)$ ha nel punto $y=0$
" presentano le particolarità indicate nei §§. 109 e 110; e nel
" caso particolare in cui la discontinuità di $\varphi(y)$ per $y=0$ è di
" prima specie, allora anche supponendo soltanto $s>1$, si hanno
" sempre le proprietà precedenti e le discontinuità di $f(x)$ sono
" esse pure di prima specie; e quando la discontinuità di $\varphi(y)$
" per $y=0$ è di quelle che possono togliersi cambiando il suo
" valore in quel punto, altrettanto accade delle discontinuità di
" $f(x)$ in tutti i punti razionali (§. 109).

" 2.° Se poi la funzione $\varphi(y)$ è continua anche per $y=0$, allora
" la funzione $f(x)$ per $s>1$ è sempre continua (§. 107); e se
" $\varphi(y)$ oltre essere finita e continua in tutto l'intervallo da -1
" a 1 ha anche una derivata determinata che è sempre numerica-
" mente inferiore a una quantità finita, allora purchè sia $s>2$, la
" funzione $f(x)$ ha pure una derivata finita e determinata per
" tutti i valori di x e questa derivata è la somma della serie delle
" derivate dei termini di $f(x)$ (§. 111). E se la derivata di $\varphi(y)$
" in ogni punto speciale fra -1 e 1 è sempre determinata e
" finita, ma col tendere di y a zero finisce per prendere anche
" valori arbitrariamente grandi, e nel punto $y=0$ è finita, allora
" è certo che la derivata di $f(x)$ sarà pure determinata e finita in
" tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$, ma non si può affermare più nulla
" pei punti irrazionali (§. 113).

" 3.° Se poi $\varphi(y)$ fra -1 e 1 è sempre finita e continua, e
" per tutti i valori di y differenti da zero ha anche una derivata
" determinata e sempre numericamente inferiore a un numero
" finito dato, ma per $y=0$ non ha derivata determinata perchè il
" rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ per $\delta=0$ non ha un limite indipendente dal segno
" di δ, o perchè almeno da una parte non ha limite determinato,
" allora la funzione $f(x)$ per $s>2$ in tutti i punti irrazionali di un
" intervallo qualunque avrà ancora una derivata finita e deter-
" minata che sarà la somma della serie delle derivate dei termini
" di $f(x)$; e quando s oltre essere maggiore di 2 sia abbastanza
" grande, essa non avrà derivata determinata in nessun punto
" razionale dello stesso intervallo, e in ognuno di questi punti
" razionali $\frac{\nu}{\mu}$ il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ in confronto al rap-
" porto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ presenterà le singolarità indicate nel §. 112. E se la
" derivata di $\varphi(y)$, sebbene ancora finita e determinata per tutti
" i valori di y differenti da zero, coll'avvicinarsi di y a zero finisce
" per prendere anche valori numericamente maggiori di qualunque
" numero dato, ma del resto $\varphi(y)$ soddisfa a tutte le altre condi-
" zioni ora indicate, allora pei punti razionali è certo che la fun-
" zione $f(x)$ presenterà le singolarità stesse che precedentemente,
" ma pei punti irrazionali non si può affermare più nulla (§. 113).

" 4.° Se poi $\varphi(y)$ fra -1 e 1 è sempre finita e continua e per
" tutti i valori di y differenti da zero ha anche una derivata deter-
" minata che, sebbene sempre finita per ognuno di questi valori
" di y, finisce per prendere anche valori numericamente maggiori
" di qualunque numero dato coll'avvicinarsi di y a zero, e nel
" punto zero ha la derivata infinita, allora intorno alla derivata
" di $f(x)$ nei punti irrazionali quando $s>2$ non si può affermare
" più nulla, e pei punti razionali si può dire che se la derivata
" di $\varphi(y)$ per $y=0$ è infinita ma non determinata di segno (in
" modo cioè (§. 72, 3.°) che il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ da una parte del

" punto $\delta=0$ abbia per limite $+\infty$ e dall'altra abbia per limite
" $-\infty$) lo stesso accade della derivata di $f(x)$ in tutti i punti
" razionali; e se la derivata di $\varphi(y)$ per $y=0$ è infinita e determi-
" nata di segno allora lo stesso accade ancora per la derivata di
" $f(x)$ in tutti i punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari, e non si può
" affermare nulla pei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari (§. 113).

" 5.° E infine se $\varphi(y)$ per $y=0$ non ha derivata determinata
" perchè il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ da una parte del punto $\delta=0$ ha per
" limite $+\infty$ o $-\infty$, e dall'altra ha un limite determinato e
" finito o oscilla fra limiti finiti, ma del resto $\varphi(y)$ soddisfa a
" tutte le altre condizioni contenute nell'enunciato del teorema
" precedente, allora la funzione $f(x)$ per $s>2$ in tutti i punti
" razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è dispari ha la derivata infinita e non
" determinata di segno; e se s, oltre essere maggiore di 2, è anche
" abbastanza grande, nei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ pei quali ν è pari $f(x)$
" non ha derivata determinata, perchè il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$
" per questi punti presenta le stesse singolarità del rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$.
" Pei punti irrazionali poi non si può affermare nulla neppure in
" questo caso (§. 113) (*).

115. Osserviamo poi che, per quanto fu detto pel caso che si

(*) Notiamo che risultati analoghi o almeno soltanto leggermente differenti si otterrebbero quando invece della funzione $f(x)$ data dalla formola (7) si considerasse una funzione $f(x)$ come la seguente:

$$f(x)=\sum \alpha_n \, \varphi(\psi_n(x))$$

ove le α_n sono costanti reali tali che la serie $\sum \alpha'_n$ dei loro valori assoluti è convergente, e le $\psi_n(x)$ sono funzioni finite e continue della x che variano soltanto fra -1 e $1, \ldots$ e si annullano per infiniti valori razionali di $x \ldots$, come per esempio: $\psi_n(x)=sn(2n x K)$, essendo $4K$ il periodo reale di una funzione ellittica snz il cui modulo è minor d'uno ec. . . . .

considerò al §. 109 si può ora aggiungere che se $\varphi(y)$ per $y=0$ almeno da una parte ha una discontinuità di seconda specie, la funzione $f(x)$, se s è abbastanza grande, negli intorni di ogni punto razionale e quindi anche di ogni punto irrazionale farà un numero infinito di oscillazioni. E se $\varphi(y)$ è continua anche per $y=0$, e in ogni intorno di questo punto almeno da una parte fa un numero infinito di oscillazioni, allora evidentemente si può dire che la funzione $f(x)$ negli intorni di ogni punto razionale e quindi anche di ogni punto irrazionale farà pure un numero infinito di oscillazioni tutte le volte che per ogni punto razionale le variazioni che si hanno per l'impiccolire di δ nell'ultimo termine della formola:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)=\sum_1^{\infty}\mu\,\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)\pi\right]-\varphi\left(\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)}{n^s}+$$
$$+\frac{1}{\mu^s}\sum_1^{\infty}\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s}$$

sono sufficientemente grandi in confronto alle variazioni corrispondenti del primo termine.

In particolare poi si può dire che se la funzione $\varphi(y)$ soddisfa alle condizioni contenute nell'enunciato del teorema 4.° del paragrafo precedente e nel punto $y=0$ ha la derivata infinita ma non determinata di segno, la funzione $f(x)$ avrà un massimo o un minimo in ogni punto razionale, e quindi nell'intorno di ogni punto farà un numero infinito di oscillazioni.

116. Mediante il principio della condensazione delle singolarità possiamo ora colla massima facilità costruire funzioni dotate di rappresentazione analitica e che in ogni intervallo finito presentano un numero infinito di singolarità relative alla continuità o alla derivata o ai massimi e minimi.

1.° Prendiamo perciò dapprima per $\varphi(y)$ una funzione che per y positivo è uguale a y e per y negativo è uguale a $-y$. Questa funzione potrà considerarsi come il valore del radicale $\sqrt{y^2}$ quando s'intende che il radicale è sempre preso positivamente, e quindi la funzione $f(x)$ corrispondente sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}\sqrt{\operatorname{sen}^2 nx\pi}\,;$$

e questa pel teorema terzo del §. 114 sarà finita e continua in tutti i punti e avrà una derivata finita e determinata in tutti i punti x irrazionali; ma non avrà derivata determinata per nessun punto razionale, e per ognuno di questi punti $\frac{\nu}{\mu}$ il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ col tendere di δ a zero per valori positivi tenderà verso un limite finito e determinato ma differente da quello che si otterrà facendo tendere δ a zero per valori negativi.

2.° Prendiamo in secondo luogo $\varphi(y)=y\operatorname{sen}(\log y^2)$. La funzione $f(x)$ corrispondente sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx\pi \operatorname{sen}[\log(\operatorname{sen}^2 nx\pi)]}{n^s}\,,$$

e questa pel teorema 3.° del §. 114 sarà finita e continua in un intervallo qualunque, e avrà una derivata determinata e finita in tutti i punti irrazionali; ma, almeno quando s è abbastanza grande, non avrà derivata determinata in nessun punto razionale, e per ognuno di questi punti $\frac{\nu}{\mu}$ il rapporto $\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+\delta\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{\delta}$ coll'impiccolire di δ sì a destra che a sinistra del punto stesso $\frac{\nu}{\mu}$ oscillerà fra limiti finiti senza tendere verso verun limite determinato.

3.° Prendasi ora $\varphi(y)=y\operatorname{sen}\frac{1}{y}$. La funzione $f(x)$ corrispondente sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx\pi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} nx\pi}\right)}{n^s}\,,$$

e mentre per questa si può ancora affermare (teor. 3.° del §. 114) che sarà sempre finita e continua e nei punti razionali non avrà

derivata determinata, non si può però dire nulla intorno alla sua derivata nei punti irrazionali, perchè in questo caso coll'avvicinarsi indefinitamente di y a zero la derivata di $\varphi(y)$, sebbene sempre determinata e finita, finisce per prendere anche valori numericamente maggiori di qualunque numero dato.

4.° Prendasi $\varphi(y)=(y^2)^{\frac{p}{q}}$ ove p e q sono numeri interi e positivi e $2p<q$, e si suppone che pel radicale debba prendersi il valore reale e positivo. La funzione $f(x)$ corrispondente sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{(\text{sen}^2 nx\pi)^{\frac{p}{q}}}{n^s},$$

e questa sarà sempre finita e continua e avrà la derivata infinita e indeterminata di segno in tutti i punti razionali (teor. 4.° §. 114) e in qualunque intervallo finito farà un numero infinito di oscillazioni (§. 115). Pei punti irrazionali poi non si può affermare nulla intorno alla derivata di questa funzione.

5.° Prendasi $\varphi(y)=(y^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}\,\text{sen}\frac{1}{y}$, α essendo positivo e minore di uno.

La funzione $f(x)$ in questo caso sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{(\text{sen}^2 nx\pi)^{\frac{1-\alpha}{2}}\,\text{sen}\left(\frac{1}{\text{sen}\, nx\pi}\right)}{n^s},$$

e poichè ora il rapporto $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ coll'avvicinarsi di y a zero indefinitamente non resta sempre compreso fra limiti finiti e non ha per limite l'infinito, l'applicazione dei teoremi del §. 114 ci permetterà soltanto di dire che questa funzione $f(x)$ è sempre finita e continua.

Però se si osserva che anche in questo caso (§. 113) sussiste la formula (4), e si può scrivere evidentemente:

$$\sum_1^{\infty}\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s}=(\mu\delta\pi)^{1-\alpha}\sum_1^{m}\frac{(\operatorname{sen}^2 n\mu\delta\pi)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(n\mu\delta\pi)^{1-\alpha}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} n\mu\delta\pi}\right)}{n^{s-1+\alpha}}+$$

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{(\operatorname{sen}^2 n\mu\delta\pi)^{\frac{1-\alpha}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} n\mu\delta\pi}\right)}{n^s}$$

ove m indica un numero intero determinato nel modo che indicammo al §. 113, basterà supporre $s>2-\alpha$ e applicare la formola (2) per giungere subito a trovare la seguente:

$$\sum_1^{\infty}\frac{\varphi(\pm\operatorname{sen} n\mu\delta\pi)}{n^s}=(\mu\pi\delta)^{1-\alpha}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\mu\delta\pi}\right)+\frac{h}{2^{s-2+\alpha}}\right\}+k\delta^{3-3\alpha}+h'\delta^{\alpha(s-1)}$$

ove h, h' e k sono quantità numericamente minori di uno, e da questa si concluderà subito (§. 115) che se s è abbastanza grande l'attuale funzione $f(x)$ in un intervallo qualunque fa un numero infinito di oscillazioni, e nei punti razionali non ha derivata determinata; e negli stessi punti il rapporto $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ coll' impiccolire di δ oscillerà continuamente fra limiti infinitamente grandi positivi e negativi, senza avere per limite neppure l'infinito.

6.° Prendasi $\varphi(y)=\operatorname{sen}\frac{1}{y}$, con $\varphi(0)=0$. La funzione $f(x)$ sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} nx\pi}\right)}{n^s},$$

ove per x razionale $=\frac{\nu}{\mu}$ devono lasciarsi i termini nei quali n è multiplo di μ; e questa sarà sempre numericamente inferiore a un numero dato finito $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^s}$, e in qualunque intervallo finito almeno quando s è maggiore di 2 sarà una funzione punteggiata discontinua che nello stesso intervallo fa soltanto un numero finito di

salti maggiori di un numero dato anche arbitrariamente piccolo σ. Inoltre questa funzione che è continua in tutti i punti irrazionali e discontinua dalle due parti di tutti i punti razionali ha tutte le discontinuità di seconda specie (teor. 1.° §. 114).

7.° Prendasi ora per $\varphi(y)$ una funzione che fra zero e 1 (0 escl.) è uguale a 1, e fra 0 e -1 (zero ancora escluso) è uguale a -1, e per $y=0$ è zero.

Per questa funzione $\varphi(y)$ si può prendere p. es. (come è noto dalla teoria della serie di Fourier) la serie trigonometrica:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)y\frac{\pi}{a}}{2n+1},$$

ove a è positivo e maggiore di uno, e quindi la funzione corrispondente $f(x)$ sarà la seguente:

$$f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s}=\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\left[\sum_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left\{(2n+1)\frac{\pi}{a}\operatorname{sen}(nx\pi)\right\}}{2n+1}\right];$$

e questa pel teorema primo del §. 114 pei punti x irrazionali sarà continua e pei punti razionali $\frac{\nu}{\mu}$ sarà discontinua, e le sue discontinuità saranno tutte discontinuità ordinarie dalle due parti del punto corrispondente. Inoltre questa funzione in ogni punto di discontinuità $\frac{\nu}{\mu}$ avrà il valore medio fra i due $f\left(\frac{\nu}{\mu}+0\right)$ e $f\left(\frac{\nu}{\mu}-0\right)$, e i salti che essa farà dalle due parti di questi punti saranno uguali a $\frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ pei punti pei quali ν è pari e a $\frac{1}{\mu^s}\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ per quelli pei quali ν è dispari (§. 109); e in ogni intervallo finito il numero dei punti in cui questi salti sono maggiori di un numero qualunque dato arbitrariamente piccolo σ sarà sempre finito.

8.° Prendasi ora per $\varphi(y)$ il quadrato della funzione precedente. La funzione corrispondente $f(x)$ sarà la seguente:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\left[\sum_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left\{(2n+1)\frac{a}{\pi}\operatorname{sen}(nx\pi)\right\}}{2n+1}\right]^2,$$

e questa in tutti i punti irrazionali sarà continua e avrà sempre lo stesso valore $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$, e nei punti razionali sarà discontinua, e le sue discontinuità saranno tutte di quelle che possono togliersi mutando il valore della funzione nel punto corrispondente. E i salti che essa farà in questi punti saranno uguali a $\frac{1}{\mu^s}\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ (§. 109)

117. Farò ora notare che si hanno anche molte altre funzioni punteggiate discontinue delle quali si ha l'espressione analitica, e fra queste una delle più notevoli è la funzione di *Riemann:*

$$G(x)=\sum_1^\infty \frac{(nx)}{n^s};$$

ove s è positivo e maggiore di uno e il simbolo (nx) indica lo zero quando il prodotto nx è intero o è nel mezzo a due numeri interi e negli altri casi indica la differenza positiva o negativa fra questo prodotto nx e il numero intero ad esso più vicino, per modo che si ha sempre come risulta dalla teoria della serie di Fourier:

$$(nx)=\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^{m-1}\frac{\operatorname{sen} 2mnx\pi}{m}.$$

Se si osserva infatti che la serie che rappresenta la funzione $G(x)$ è convergente in ugual grado in un intervallo qualunque (§. 93), e la funzione (nx) pei valori irrazionali di x e per quelli irrazionali $\frac{\nu}{2\mu+1}$ il cui denominatore è dispari è sempre continua qualunque sia n, si vede subito (§. 97) che questa funzione $G(x)$ è sempre finita, e in tutti i punti irrazionali e in quelli razionali $\frac{\nu}{2\mu+1}$ il cui denominatore è dispari è anche continua. Invece in tutti i punti razionali $\frac{\nu}{2\mu}$ il cui denominatore è pari si trova facilmente che questa funzione è discontinua dalle due parti, e le sue discontinuità sono discontinuità ordinarie.

Se si osserva infatti che per ognuno di questi punti si ha:

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)=\sum_{1\mu}^\infty \frac{\left(n\frac{\nu}{2\mu}\right)}{n^s},$$

ove la somma del secondo membro deve estendersi a tutti i numeri interi che non sono multipli di μ, si trova che:

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)-G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)=\sum_{1\mu}^{\infty}\frac{\left[n\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)\right]-\left(n\frac{\nu}{2\mu}\right)}{n^s}+\frac{1}{2^s\mu^s}\sum_1^{\infty}\frac{(2n\mu\delta)}{n^s}+$$

$$+\frac{1}{\mu^s}\sum_0^{\infty}\frac{\left[\left(2n+1\right)\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)\mu\right]}{(2n+1)^s};$$

e siccome le serie che qui compariscono sono convergenti in egual grado, la prima e la seconda evidentemente coll'impiccolire di δ tenderanno a zero (§. 94), e la terza tenderà verso la somma della serie $\pm\frac{1}{2\mu^s}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}$ giacchè i suoi termini $\left[(2n+1)\left(\frac{\nu}{2\mu}+\delta\right)\mu\right]$ coll'impiccolire indefinitamente di δ per δ positivo tendono evidentemente verso $-\frac{1}{2}$, e per δ negativo tendono invece verso $\frac{1}{2}$; talchè si può senz'altro concludere subito che:

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}+0\right)-G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)=-\frac{1}{2\mu^s}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s},$$

$$G\left(\frac{\nu}{2\mu}-0\right)-G\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)=+\frac{1}{2\mu^s}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s};$$

ciò che mostra evidentemente quanto si è detto sopra, e mostra di più che il valore che ha la funzione stessa $G(x)$ nei punti di discontinuità $\frac{\nu}{2\mu}$ è il valore medio fra i due $G\left(\frac{\nu}{2\mu}+0\right)$ e $G\left(\frac{\nu}{2\mu}-0\right)$, e i salti che essa fà in questi punti dalle due parti sono uguali a $\frac{1}{2\mu^s}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}$, talchè in ogni intervallo finito esiste soltanto un numero finito di punti nei quali essa fà salti maggiori di un numero dato σ.

Inoltre siccome in tutti i punti x irrazionali e in quelli razionali $\frac{\nu}{2\mu+1}$ pei quali il denominatore è dispari la funzione (nx) per qualunque valore di n ha una derivata determinata e uguale ad n, supponendo $s>2$, e facendo intorno alla funzione $\sum_0^\infty (nx)$ per $x=\frac{\nu}{2\mu+1}$ ragionamenti simili a quelli che si fecero nel §. 113 intorno alla funzione $\sum_1^\infty \mu \frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s}$ per $x=\frac{\nu}{\mu}$, si trova subito che in tutti i punti razionali $\frac{\nu}{2\mu+1}$ pei quali il denominatore è dispari la funzione $G(x)$ ha anche una derivata finita e determinata che è la somma della serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-1}}$, e che quindi è la stessa in tutti quei punti. Pei punti irrazionali poi resta incerto se la funzione $G(x)$ abbia o nò una derivata determinata e finita.

118. Trovo ora conveniente di aggiungere anche un esempio dato da *Hankel* di funzioni totalmente discontinue in un intervallo qualunque e per le quali si ha una espressione analitica.

Prendiamo perciò la funzione $\varphi(y)$ che per $y=0$ è zero, e per y compreso fra 0 e $+1$ è uguale a $+1$, mentre per y compreso fra 0 e -1 è uguale a -1, e che come già abbiamo detto nel §. 116 ha per espressione analitica:

$$\varphi(y)=\frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2n+1)y\frac{\pi}{a}}{2n+1},$$

ove a è positivo e maggiore di uno; e formiamo la serie

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s[\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)]^2}$ per $s>1$.

Questa serie pei valori irrazionali di x sarà sempre uguale a $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$, mentre pei valori razionali di x sarà infinita perchè allora alcuni dei suoi termini sono infiniti e sono evidentemente tutti positivi; quindi la funzione:

$$f(x)=\frac{\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}}{\sum_1^\infty \frac{1}{n^s[\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)]^2}}$$

in un intervallo qualunque sarà una funzione totalmente discontinua che pei valori irrazionali di x è uguale a uno e pei valori razionali è uguale a zero.

È poi evidente che prendendo per $\varphi(y)$ altre funzioni che soddisfacessero ancora alla condizione di essere zero per $y=0$, le formole analoghe alla precedente che allora si avrebbero, e quelle che ne risulterebbero aggiungendo ai secondi membri una funzione continua qualunque $f_1(x)$, ci darebbero altri esempi di espressioni analitiche di funzioni che in un intervallo qualunque sono totalmente discontinue.

Non tralasceremo di osservare che quest'ultimo esempio di funzioni totalmente discontinue dotate di rappresentazione analitica, e quello della funzione di Riemann del paragrafo precedente possono riguardarsi come risultanti da una estensione del principio di condensazione delle singolarità; e noteremo inoltre che questo principio potrebbe evidentemente venire esteso, per formare espressioni analitiche di funzioni che abbiano infinite singolarità, anche secondo procedimenti differenti da quelli esposti sopra, servendosi a tale uopo sia ancora delle serie, sia dei prodotti infiniti, delle frazioni continue ec.

Funzioni che non hanno mai la derivata determinata e finita.

119. Il principio della condensazione delle singolarità ci ha condotti a trovare un numero infinito di funzioni che sebbene singolarissime hanno pur non ostante una espressione analitica, e funzioni che sebbene sempre finite, continue e dotate di una espressione analitica, non ammettono derivata o l'hanno infinita in un numero infinito di punti di qualunque intervallo finito. Altre di queste ultime funzioni si avranno in seguito applicando l'inte-

grazione per serie termine a termine a alcune delle serie che col principio della condensazione delle singolarità abbiamo trovato che rappresentano funzioni che in qualunque intervallo finito hanno un numero infinito di discontinuità; quindi con questi risultati si ha già abbastanza per potere asserire che sia ormai messo fuori di dubbio che la continuità di una funzione in tutto un intervallo non è di per sè sola condizione sufficiente per la esistenza della derivata della funzione stessa neppure in generale.

Si può però mostrare anche qualche cosa di più a conferma di questo fatto, poichè, mentre ciò che precede ci dà soltanto delle funzioni che sebbene non ammettano derivata o l'abbiano infinita in un numero infinito di punti di qualunque intervallo, negli altri punti (che sono pure in numero infinito) ammettono ancora una derivata finita e determinata, o almeno si è incerti sulla esistenza o nò della derivata stessa, si possono costruire anche altre funzioni che, sebbene sempre finite e continue, non ammettono *mai* una derivata determinata e finita in nessun punto di qualunque intervallo, o tutt'al più hanno una derivata che in alcuni punti è infinita e determinata di segno, e in tutti gli altri (in numero infinito) è infinita e indeterminata di segno.

120. Prendiamo perciò a considerare una serie $\Sigma u_n(x)$ ove le $u_n(x)$ sono funzioni che, oltre essere finite e continue in tutto un intervallo (a, b), ammettono sempre una derivata determinata e finita (finchè n è finito), e sono tali che la serie stessa $\Sigma u_n(x)$ è convergente per tutti i valori di x fra a e b, e rappresenta una funzione di x finita e continua $f(x)$. Inoltre ognuna di queste funzioni $u_n(x)$ ammetta nell'intervallo (a, b) dei massimi e minimi il cui numero, sebbene sempre finito, vada crescendo indefinitamente col crescere di n, e in modo che a partire da un certo valore di n essi si succedano a intervalli minori di qualunque quantità data in tutto l'intervallo (a, b); sarà facile allora di vedere che quando siano soddisfatte certe altre condizioni semplici, la serie $\Sigma u_n(x)$ rappresenterà una funzione di x che sebbene finita e continua non avrà mai una derivata finita e determinata in tutto l'intervallo (a, b).

S'indichi infatti con $R_m(x)$ il resto $\sum_{m+1}^{\infty} u_n(x)$ della serie data

pel valore x della variabile, e con u'_n il massimo valore assoluto della derivata $u'_n(x)$ di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b), o il limite superiore dei suoi valori assoluti; allora per un punto x' qualunque fra a e b si avrà:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}\frac{u_n(x'+h)-u_n(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}+$$
$$+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h},$$

o anche:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\eta_m\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h},$$

essendo h un numero positivo o negativo sufficientemente piccolo, e η_m un numero compreso fra -1 e 1 che dipende da m, da x' e da h.

Si consideri ora un piccolo intorno $(x'-h_1, x'+h_2)$ del punto x'. In questo intorno, quando m è abbastanza grande, cadranno sempre alcuni massimi e minimi di $u_m(x)$; quindi se si fà variare h in modo che $x'+h$ resti nell'intorno stesso (a destra o a sinistra di x'), la differenza $u_m(x'+h)-u_m(x')$ farà anch'essa alcune oscillazioni, e quando $x'+h$ venga a corrispondere al primo massimo di $u_m(x)$ che succede a x' o altrimenti quando venga a corrispondere al primo minimo pure successivo a x' a destra o a sinistra, la differenza stessa in valore assoluto non sarà mai inferiore a $\frac{D_m}{2}$, essendo D_m la minima delle varie oscillazioni che $u_m(x)$ fà nell'intervallo (a, b).

Prendasi ora h in modo che $x'+h$ cada a destra o a sinistra di x' in questo primo punto di massimo o di minimo di $u_m(x)$ che succede a x' per modo che si abbia in valore assoluto:

$u_m(x'+h)-u_m(x')\geq\frac{D_m}{2}$; allora se δ_m è la massima distanza fra un massimo e minimo successivo di $u_m(x)$, sarà numericamente $h<2\delta_m$, e quindi h, per m abbastanza grande, sarà piccolo quanto si vuole e $x'+h$ cadrà nell'intorno che si considera di x', e si avrà inoltre:

di α_m non dipende da quello di h, il rapporto stesso $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ o non avrà verun limite o da una parte avrà per limite $+\infty$ e dall'altra $-\infty$, e se il segno di α_m dipenderà da h allora potrà in alcuni punti aver per limite l'infinito collo stesso segno sì a destra che a sinistra, ma in altri punti in numero infinito (non potendo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ avere mai un limite determinato e finito) dovrà (§. 71) non tendere verso alcun limite senza neppure potere aver per limite da una parte $+\infty$ e dall'altra $-\infty$.

121. Per questi risultati si può adunque evidentemente asserire che: "quando i termini $u_n(x)$ della serie $\Sigma u_n(x)$, oltre essere fun-
" zioni finite e continue nell'intervallo (a, b) e ammettere una
" derivata prima determinata e finita finchè n è finito, sono tali
" altresì che la somma della serie sia una funzione finita e continua
" $f(x)$ di x nello stesso intervallo, questa funzione sebbene sempre
" finita e continua non avrà mai una derivata determinata e finita,
" e tutt'al più questa derivata potrà essere in alcuni punti infinita
" e determinata di segno e in altri (in numero infinito) essere
" infinita e indeterminata di segno, tutte le volte che si verifi-
" chino le condizioni seguenti:

" 1.° Che i termini $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b) ammettano
" dei massimi e minimi il cui numero, sebbene sempre finito, vada
" crescendo indefinitamente con n, e in modo che a partire da un
" conveniente valore di n questi massimi e minimi si succedano
" sempre in tutto l'intervallo (a, b) a distanze minori di qualunque
" quantità data.

" 2.° Che se δ_m è la massima distanza fra un massimo e un
" minimo successivi di $u_m(x)$, e D_m è la minima delle varie oscilla-
" zioni che $u_m(x)$ fà nell'intervallo (a, b), la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$ abbia per
" limite zero per $m=\infty$.

" 3.° Che il prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, ove le u'_n sono i massimi
" fra i valori assoluti delle derivate di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b)
" o i limiti superiori di questi valori, col crescere indefinito di m si

per limite l'infinito, u'_m non tenderà a zero, e perciò la serie $\Sigma u'_n$ sarà divergente (*).

Per questa circostanza il fattore $\sum_1^{m-1} u'_n$ che comparisce nel primo termine della quantità fra parentesi delle due formule precedenti crescerà indefinitamente con m; però il prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, come a fortiori anche l'altro $\frac{2h}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, potranno benissimo avere per limite una quantità finita o almeno non prendere valori superiori a una data quantità finita.

Ora se questo prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, o almeno il valore assoluto dell'altro $\frac{2h}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, si manterrà sempre inferiore all'unità più di una quantità finita, e qualunque sia x' e il segno di h, per tutti o per alcuni valori di m superiori ad un dato numero arbitrariamente grande, α_m avrà sempre lo stesso segno di $R_m(x'+h)-R_m(x')$; o almeno se, esistendo un limite superiore *finito* dei valori di $R_m(x'+h)-R_m(x')$ pei varii valori di x' quando h è scelto nel modo indicato sopra, e essendo $2R'_m$ questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n+\frac{4R'_m}{D_m}$, o anche soltanto l'altra $\frac{2h'}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n+\frac{4R'_m}{D_m}$, ove h' è il valore assoluto di h, si manterrà sempre inferiore ad uno più di una quantità finita, allora evidentemente $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ per $h=\pm 0$ non potrà mai avere un limite determinato e finito; ma anzi, quando il segno

(*) Volendo col mezzo di serie costruire delle funzioni $\Sigma u_n(x)$ che non hanno mai derivata in tutto un intervallo finito (α, b), era necessario porre la condizione che la serie $\Sigma u'_n$ fosse divergente, perchè altrimenti la serie $\Sigma u'_n$ sarebbe stata convergente in ugual grado fra α e b, e sarebbe venuto applicabile il teorema del §. 105. Qui però questa condizione si trova inclusa, come abbiamo visto, nell'altra che la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$ abbia per limite zero, o, anche più generalmente, non abbia per limite l'infinito.

di α_m non dipende da quello di h, il rapporto stesso $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ o non avrà verun limite o da una parte avrà per limite $+\infty$ e dall'altra $-\infty$, e se il segno di α_m dipenderà da h allora potrà in alcuni punti aver per limite l'infinito collo stesso segno sì a destra che a sinistra, ma in altri punti in numero infinito (non potendo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ avere mai un limite determinato e finito) dovrà (§. 71) non tendere verso alcun limite senza neppure potere aver per limite da una parte $+\infty$ e dall'altra $-\infty$.

121. Per questi risultati si può adunque evidentemente asserire che: "quando i termini $u_n(x)$ della serie $\Sigma u_n(x)$, oltre essere fun-" zioni finite e continue nell'intervallo (a, b) e ammettere una " derivata prima determinata e finita finchè n è finito, sono tali " altresì che la somma della serie sia una funzione finita e continua " $f(x)$ di x nello stesso intervallo, questa funzione sebbene sempre " finita e continua non avrà mai una derivata determinata e finita, " e tutt'al più questa derivata potrà essere in alcuni punti infinita " e determinata di segno e in altri (in numero infinito) essere " infinita e indeterminata di segno, tutte le volte che si verifi-" chino le condizioni seguenti:

" 1.° Che i termini $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b) ammettano " dei massimi e minimi il cui numero, sebbene sempre finito, vada " crescendo indefinitamente con n, e in modo che a partire da un " conveniente valore di n questi massimi e minimi si succedano " sempre in tutto l'intervallo (a, b) a distanze minori di qualunque " quantità data.

" 2.° Che se δ_m è la massima distanza fra un massimo e un " minimo successivi di $u_m(x)$, e D_m è la minima delle varie oscilla-" zioni che $u_m(x)$ fà nell'intervallo (a, b), la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$ abbia per " limite zero per $m=\infty$.

" 3.° Che il prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, ove le u'_n sono i massimi " fra i valori assoluti delle derivate di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b) " o i limiti superiori di questi valori, col crescere indefinito di m si

" mantenga sempre inferiore alla unità più di una quantità finita,
" e nello stesso tempo, per tutti o per alcuni valori di m maggiori
" di un dato numero arbitrariamente grande m', la differenza
" $u_m(x'+h) - u_m(x')$, qualunque sia x', abbia lo stesso segno di
" $R_m(x'+h) - R_m(x')$, quando h è scelto in modo che $x'+h$ cada nel
" primo punto di massimo o di minimo di $u_m(x)$ che succede a x' a
" destra e a sinistra per modo che si abbia in valore assoluto
" $u_m(x'+h) - u_m(x') \geq \frac{D_m}{2}$; o almeno, se quest'ultima particolarità
" non si verifica o si è incerti, esista un limite superiore *finito* pei
" valori assoluti di $R_m(x'+h) - R_m(x')$ corrispondenti ai varii valori
" di x' e di h, quando h è scelto nel modo indicato, e essendo $2R'_m$
" questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità:
" $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n + \frac{4R'_m}{D_m}$ si mantenga sempre numericamente inferiore
" all'unità più di una quantità finita ".

E si può notare che in questa condizione 3.ª alla quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$ si potrà sostituire l'altra $\frac{2h'}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$ ove h' è il valore assoluto di h che spesso si potrà prendere inferiore a $2\delta_m$; e in particolare quando il valore medio fra ogni massimo e minimo consecutivi di $u_m(x)$ sia nel punto di mezzo dell'intervallo corrispondente al detto massimo e minimo, per h' si potrà sempre porre $\frac{3}{2}\delta_m$, sostituendo così nella condizione precedente alla quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$ l'altra $\frac{3\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$.

Nei casi speciali poi questa condizione potrà ridursi talvolta anche meno restrittiva.

122. Inoltre si può notare che se sono soddisfatte le condizioni ora indicate e se (come accade p. es. quando i massimi di $u_m(x)$ sono tutti eguali fra loro e così pure i minimi) il segno di $u_m(x'+h) - u_m(x')$ quando h è scelto nel modo indicato non dipende da h, la derivata della nostra funzione $f(x)$ non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno, ma o non esisterà affatto

di α_m non dipende da quello di h, il rapporto stesso $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ o non avrà verun limite o da una parte avrà per limite $+\infty$ e dall'altra $-\infty$, e se il segno di α_m dipenderà da h allora potrà in alcuni punti aver per limite l'infinito collo stesso segno sì a destra che a sinistra, ma in altri punti in numero infinito (non potendo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ avere mai un limite determinato e finito) dovrà (§. 71) non tendere verso alcun limite senza neppure potere aver per limite da una parte $+\infty$ e dall'altra $-\infty$.

121. Per questi risultati si può adunque evidentemente asserire che: "quando i termini $u_n(x)$ della serie $\Sigma u_n(x)$, oltre essere fun-" zioni finite e continue nell'intervallo (a, b) e ammettere una " derivata prima determinata e finita finchè n è finito, sono tali " altresì che la somma della serie sia una funzione finita e continua " $f(x)$ di x nello stesso intervallo, questa funzione sebbene sempre " finita e continua non avrà mai una derivata determinata e finita, " e tutt' al più questa derivata potrà essere in alcuni punti infinita " e determinata di segno e in altri (in numero infinito) essere " infinita e indeterminata di segno, tutte le volte che si verifi-" chino le condizioni seguenti:

" 1.° Che i termini $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b) ammettano " dei massimi e minimi il cui numero, sebbene sempre finito, vada " crescendo indefinitamente con n, e in modo che a partire da un " conveniente valore di n questi massimi e minimi si succedano " sempre in tutto l'intervallo (a, b) a distanze minori di qualunque " quantità data.

" 2.° Che se δ_m è la massima distanza fra un massimo e un " minimo successivi di $u_m(x)$, e D_m è la minima delle varie oscilla-" zioni che $u_m(x)$ fà nell'intervallo (a, b), la quantità $\frac{\delta_m}{D_m}$ abbia per " limite zero per $m=\infty$.

" 3.° Che il prodotto $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n$, ove le u'_n sono i massimi " fra i valori assoluti delle derivate di $u_n(x)$ nell'intervallo (a, b) " o i limiti superiori di questi valori, col crescere indefinito di m si

« mantenga sempre inferiore alla unità più di una quantità finita,
« e nello stesso tempo, per tutti o per alcuni valori di m maggiori
« di un dato numero arbitrariamente grande m', la differenza
« $u_m(x'+h)-u_m(x')$, qualunque sia x', abbia lo stesso segno di
« $R_m(x'+h)-R_m(x')$, quando h è scelto in modo che $x'+h$ cada nel
« primo punto di massimo o di minimo di $u_m(x)$ che succede a x' a
« destra e a sinistra per modo che si abbia in valore assoluto
« $u_m(x'+h)-u_m(x')\geq\frac{D_m}{2}$; o almeno, se quest' ultima particolarità
« non si verifica o si è incerti, esista un limite superiore *finito* pei
« valori assoluti di $R_m(x'+h)-R_m(x')$ corrispondenti ai varii valori
« di x' e di h, quando h è scelto nel modo indicato, e essendo $2R'_m$
« questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità:
« $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n+\frac{4R'_m}{D_m}$ si mantenga sempre numericamente inferiore
« all'unità più di una quantità finita ».

E si può notare che in questa condizione 3.ª alla quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$ si potrà sostituire l'altra $\frac{2h'}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$ ove h' è il valore assoluto di h che spesso si potrà prendere inferiore a $2\delta_m$; e in particolare quando il valore medio fra ogni massimo e minimo consecutivi di $u_m(x)$ sia nel punto di mezzo dell'intervallo corrispondente al detto massimo e minimo, per h' si potrà sempre porre $\frac{3}{2}\delta_m$, sostituendo così nella condizione precedente alla quantità $\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$ l'altra $\frac{3\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1}u'_n$.

Nei casi speciali poi questa condizione potrà ridursi talvolta anche meno restrittiva.

122. Inoltre si può notare che se sono soddisfatte le condizioni ora indicate e se (come accade p. es. quando i massimi di $u_m(x)$ sono tutti eguali fra loro e così pure i minimi) il segno di $u_m(x'+h)-u_m(x')$ quando h è scelto nel modo indicato non dipende da h, la derivata della nostra funzione $f(x)$ non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno, ma o non esisterà affatto

perchè il rapporto $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ prenderà continuamente valori positivi e valori negativi o almeno oscillerà continuamente tanto per h positivo che per h negativo, o tutto al più potrà essere $+\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra. E se per ogni valore di x' esisteranno dei valori di m pei quali α_m o $u_m(x'+h)-u_m(x')$ sia positivo, e altri pei quali invece sia negativo quando h ha uno stesso segno positivo o negativo, allora il rapporto $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ coll'impicciolire di h per valori positivi o per valori negativi oscillerà continuamente fra limiti arbitrariamente grandi positivi e negativi, e la derivata di $f(x)$ non potrà mai riguardarsi neppure come infinita e determinata o nò di segno, ma dovrà riguardarsi come non esistente affatto.

123. Daremo poi degli esempi speciali di funzioni che in conseguenza di ciò che abbiamo esposto non ammettono mai una derivata determinata e finita in qualunque punto di un intervallo dato.

Ora vogliamo dare anche un altro teorema del genere di quello sopra enunciato, che in parte si trova in esso compreso, e in parte nò.

Ammettiamo perciò che le funzioni $u_n(x)$ che compariscono nella serie $\Sigma u_n(x)$, oltre a soddisfare alle condizioni poste in principio del §. 120, ammettano anche una derivata seconda finita e determinata (finche n è finito) in tutto l'intervallo (a, b). Allora si avrà:

$$\frac{u_n(x'+h)-u_n(x')}{h}=u'_n(x')+\frac{h}{2}u''_n(x'+\theta_n h),$$

essendo θ_n un numero compreso fra 0 e 1 che dipende da n da x' e da h; e quindi sarà:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u'_n(x')+\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u''_n(x'+\theta_n h)+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+$$
$$+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h};$$

e se u''_n è il massimo valore assoluto o il limite superiore dei valori assoluti di $u''_n(x)$ nell'intervallo (a, b), si potrà anche scrivere:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}=\sum_1^{m-1}u'_n(x')+\eta_m\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u''_n+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+$$
$$+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h},$$

essendo η_m un numero compreso fra -1 e 1.

Similmente per un altro valore h_1 di h si avrà:

$$\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\sum_1^{m-1}u'_n(x')+\eta'_m\frac{h_1}{2}\sum_1^{m-1}u''_n+\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{h_1}+$$
$$+\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1},$$

essendo η'_m una nuova quantità compresa fra -1 e 1, e quindi sarà:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\eta_m\frac{h}{2}\sum_1^{m-1}u''_n+\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{h}+$$
$$-\eta'_m\frac{h_1}{2}\sum_1^{m-1}u''_n-\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{h_1}+$$
$$+\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}-\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1}.$$

Si supponga ora che quando x passa da a a b, essendo $a<b$, i massimi di $u_m(x)$ che successivamente s'incontrano siano tutti uguali o almeno non vadano diminuendo, e i minimi invece siano pure tutti uguali o almeno non vadano crescendo.

Allora se per h si prende il valore positivo che fà cadere $x'+h$ nel primo massimo o minimo di $u_m(x)$ che succede a x', come si fece al §. 120, e per h_1 si prende invece il valore maggiore di h che fà cadere $x'+h_1$ nel minimo o nel massimo che succede a $x'+h$, la differenza $u_m(x'+h_1)-u_m(x')$ sarà zero o sarà di segno contrario all'altra $u_m(x'+h)-u_m(x')$; e quindi indicando con D'_m la massima delle oscillazioni che fà $u_m(x)$ nell'intervallo (a, b), si avrà:

$$\frac{u_m(x'+h)-u_m(x')}{h}-\frac{u_m(x'+h_1)-u_m(x')}{h_1}=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2h}+\alpha_m\varepsilon_m\frac{2h}{h_1}\frac{D'_m}{2h}=$$

$$=\alpha_m\gamma_m\frac{D_m}{2h}\left(1+2\varepsilon'_m\frac{D'_m}{D_m}\right),$$

essendo ε_m e ε'_m quantità positive comprese fra 0 e 1, e α_m e γ_m avendo i significati dei paragrafi precedenti; e quindi si potrà scrivere:

$$(1)\ \frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\frac{\alpha_m\gamma_m D_m}{2h}\left\{\frac{\alpha_m\eta_m}{\gamma_m}\frac{h^2}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n+\right.$$

$$+\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}-\frac{\alpha_m\eta'_m}{\gamma_m}\frac{hh_1}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n-$$

$$\left.-2\frac{\alpha_m}{\gamma_m}\frac{h}{h_1}\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{D_m}+1+2\varepsilon'_m\frac{D'_m}{D_m}\right\}$$

e essendo $h<h_1$ si avrà anche:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}=\frac{\alpha_m\gamma_m D_m}{2h}\left\{\eta''_m\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1}u''_n+\right.$$

$$\left.+2\alpha_m\varepsilon''_m\frac{R_m(x'+h)-R_m(x')}{D_m}-2\alpha_m\varepsilon'''_m\frac{R_m(x'+h_1)-R_m(x')}{D_m}+1+2\varepsilon'_m\frac{D'_m}{D_m}\right\}$$

essendo η''_m una quantità compresa fra — 1 e 1 e ε''_m e ε'''_m quantità comprese fra 0 e 1.

Ammettiamo ora che i massimi e minimi di $u_m(x)$, oltre a soddisfare alla condizione posta sopra rispetto ai loro valori, si succedano con tale rapidità che il rapporto $\frac{\delta_m}{D_m}$ col crescere di m prenda soltanto valori che non vanno al di là di un numero finito, e osserviamo che ciò che si dice per h e h_1 positivi può ripetersi per h e h_1 negativi; si vedrà subito (come nei casi considerati nei paragrafi precedenti) che, in questa ipotesi, se avviene che per tutti o per alcuni valori di m superiori a un numero arbitrariamente grande i valori scelti di h e h_1 facciano acquistare alle differenze $R_m(x'+h)-R_m(x')$, e $R_m(x'+h_1)-R_m(x')$ segni eguali e contrarii respettivamente a quello di $u_m(x'+h)-u_m(x')$ (o di α_m), allora

basterà che il prodotto $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum^{m-1} u''_n$ si mantenga inferiore all'unità più di una quantità finita, perchè in valore assoluto la differenza $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}-\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}$ non scenda al disotto di un certo limite; e quindi, poichè per m abbastanza grande $x'+h$, e $x'+h_1$ vengono a cadere in un intorno piccolo quanto si vuole di x', basterà il verificarsi di queste circostanze (§. 22) per potere concludere che $f(x)$ nel punto qualunque x' non ammette una derivata determinata e finita. Lo stesso poi accadrà anche se non sono soddisfatte le condizioni che ora abbiamo date rispetto ai segni di una o di tutte e due le differenze $R_m(x'+h)-R_m(x')$, $R_m(x'+h_1)-R_m(x')$ quando h e h_1 sono scelti nel modo indicato, purchè allora esista un limite superiore *finito* dei valori assoluti di queste differenze pei varii valori di x' di h e di h_1, e essendo $2R'_m$ questo limite superiore o un numero maggiore, la quantità $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u''_n+2t\frac{R'_m}{D_m}$ con $t=2$ o $t=4$ si mantenga inferiore alla unità più di una quantità finita; talchè in tutti questi casi la derivata di $f(x)$, non essendo mai finita e determinata, potrà in alcuni punti essere infinita e determinata di segno, ma in altri, in numero infinito, dovrà non esistere affatto o tutt'al più essere infinita e indeterminata di segno.

E si può notare che onde non esista una derivata determinata e finita di $f(x)$ basterà che le condizioni ora indicate rispetto alle quantità $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u''_n$, o $\frac{h(h+h_1)}{D_m}\sum_1^{m-1} u''_n+2t\frac{R'_m}{D_m}$ siano soddisfatte quando in esse per h si pone $2\delta_m$ e per h_1 si pone $3\delta_m$; e se come si disse in fine del §. 121 il valore medio fra ogni massimo e minimo consecutivi di $u_m(x)$ cade nel mezzo dell'intervallo corrispondente allo stesso massimo e minimo, per h si potrà porre $\frac{3}{2}\delta_m$ e per h_1 si potrà porre $\frac{5}{2}\delta_m$, riducendo così le quantità stesse a $\frac{6\delta^2_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u''_n$, e $\frac{6\delta^2_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u''_n+2t\frac{R'_m}{D_m}$.

Nei casi speciali poi questa condizione potrà talvolta ridursi anche meno restrittiva.

124. Facciamo ora alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Prendasi $u_n(x) = a_n v_n(b_n x)$, ove le a_n sono costanti tali che la serie $\Sigma a'_n$ dei loro valori assoluti a'_n sia convergente, le b_n sono quantità positive che crescono indefinitamente con n e per modo che il prodotto $a_n b_n$ non abbia per limite zero per $n=\infty$, e le $v_n(y)$ sono funzioni finite tali che per tutti i valori di y le loro derivate $v'_n(y)$, $v''_n(y)$ non superano mai in valore assoluto una quantità finita A, e i loro massimi e minimi sono uguali a 1 e a -1 e si succedono a distanze fisse d_n sempre minori di una data quantità finita per qualsiasi valore di n.

Allora le funzioni $u_n(x)$ avranno i massimi e minimi alle distanze $\frac{d_n}{b_n}$, e secondo le notazioni dei paragrafi precedenti si avrà $\delta_m = \frac{d_m}{b_m}$, $D_m = 2a'_m$, e la serie $\Sigma u_n(x) = \Sigma a_n v_n(b_n x)$ sarà convergente in ugual grado in qualunque intervallo, e quindi rappresenterà una funzione finita e continua di x per qualsiasi valore di x (§. 98).

Inoltre per questa serie si avrà, sempre in valore assoluto, $R_m(x') \leq R'_m$, $R_m(x'+h) - R_m(x') \leq 2R'_m$, essendo R'_m il resto $\sum_{m+1}^{\infty} a'_n$ della serie $\Sigma a'_n$; quindi, per quanto si trovò nei paragrafi precedenti, si può asserire che la funzione $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ non avrà mai una derivata determinata e finita, e tutt'al più questa derivata sarà infinita ma sempre indeterminata di segno (§. 122), tutte le volte che si avrà $\lim a'_m b_m = \infty$ e:

$$\frac{2Ad_m}{a'_m b_m} \sum_{1}^{m-1} a'_n b_n + \frac{2R'_m}{a'_m} < 1, \tag{2}$$

per qualunque valore di m e anche al limite per $m=\infty$; e similmente la stessa funzione non avrà mai una derivata determinata e finita quando il prodotto $a_m b_m$ sarà qualunque senza però avere per limite zero, e si avrà:

$$\frac{5Ad^2_m}{a'_m b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b^2_n + \frac{4R'_m}{a'_m} < 1; \tag{3}$$

e se i valori medi fra i massimi e minimi consecutivi di $v_n(y)$ cadranno nel mezzo dell'intervallo d_n corrispondente, a queste condizioni si potranno sostituire le altre:

$$\frac{3}{2}\frac{Ad_m}{a'_m b_m}\sum_1^{m-1} a'_n b'_n + \frac{2R'_m}{a'_m} < 1, \tag{4}$$

$$\frac{3Ad^2_m}{a_m' b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b_n + \frac{4R'_m}{a'_m} < 1, \tag{5}$$

dovendo insieme alla prima di queste condizioni il prodotto $a'_m b_m$ aver per limite l'infinito per $m=\infty$, e insieme alla seconda potendo il prodotto stesso $a'_m b_m$ essere qualunque purchè però il suo limite, se esiste, sia diverso da zero; e in questo secondo caso per la formola (1) si vedrebbe pure facilmente che la seconda di queste condizioni può anche rendersi meno restrittiva col ridurla all'altra:

$$\frac{3Ad^2_m}{a'_m b^2_m}\sum_1^{m-1} a'_n b^2_n + \frac{16}{5}\frac{R'_m}{a'_m} < 1. \tag{6}$$

Osserviamo infine che, siccome si ha:

$$b_{m+s}(x'+h) = \frac{b_{m+s}}{b_m} b_m(x'+h),$$

se a partire da un certo valore di n le quantità d_n sono costanti e uguali a d, e i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ per $s \geq 0$ sono numeri interi dispari e tutte le funzioni $v_n(x)$ hanno i loro massimi e minimi nei punti $0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d, \ldots$, basterà che $b_m(x'+h)$ corrisponda a un massimo o a un minimo di $v_n(y)$ perchè $b_{m+s}(x'+h)$ corrisponda pure a un massimo o a un minimo respettivamente di $v_{m+s}(y)$; e quindi allora, se si ammette anche che le quantità a_n a partire da un certo valore di n siano tutte positive, la differenza:

$$R_m(x'+h) - R_m(x') = \sum_{m+1}^{\infty} a_n \{ v_n[b_n(x'+h)] - v_n(b_n x') \}$$

o sarà nulla o avrà lo stesso segno di $u_m(x'+h)-u_m(x')$, mentre l'altra differenza $R_m(x'+h_1)-R_m(x')$ che si considerò nel §. 123 avrà segno contrario, e perciò in questo caso in cui, almeno a partire da un certo valore di n, le a_n sono positive e i quozienti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ per $s\geq 0$ sono numeri interi dispari e le d_n sono costanti e uguali a d, le condizioni (2) e (3) si riducono respettivamente alle altre più semplici:

$$\frac{2Ad}{a_m b_m}\sum_1^{m-1} a'_n b_n < 1, \qquad \frac{5Ad^2}{a_m b_m^2}\sum_1^{m-1} a'_n b_n^2 < 1,$$

e le (4) e (5) si riducono alle altre:

$$\frac{3}{2}\frac{Ad}{a_m b_m}\sum_1^{m-1} a'_n b_n < 1, \qquad \frac{3Ad^2}{a_m b_m^2}\sum_1^{m-1} a'_n b_n < 1 .$$

Le stesse condizioni poi si avranno anche quando i massimi e i minimi di $v_n(y)$ sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, $\pm\frac{5}{2}d$,.... purchè allora i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$, oltre essere numeri interi dispari, siano della forma $4p_s+1$ essendo p_s un numero intero.

125. E così, in particolare, supponendo $a_n=\pm a^n$, $b_n=b^n$ con a positivo e minore di uno, e b positivo e maggiore di uno, si vede subito di qui che se le funzioni $v_n(y)$ hanno i loro massimi e minimi nei punti $0, \pm d, \pm 2d, \pm 3d,\ldots.$, e i valori medii di $v_n(y)$ fra questi massimi e minimi consecutivi sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d, \pm\frac{3}{2}d, \pm\frac{5}{2}d,\ldots.$, e se inoltre b è un numero intero dispari, e si ha:

$$(7) \qquad ab > 1+\frac{3}{2}Ad, \text{ o } ab^2 > 1+3Ad^2,$$

essendo nel primo caso $ab>1$ e nel secondo $ab\geq 1$, si può assicurare che la serie $\Sigma a^n v_n(b^n x)$ rappresenterà una funzione di x finita e continua che non avrà mai una derivata determinata e finita in nessun punto, e nel primo caso questa derivata non potrà mai

neppure essere infinita e determinata di segno. Lo stesso poi e negli stessi casi accadrà quando i massimi e i minimi di $v_n(y)$ saranno nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, $\pm\frac{5}{2}d$,... e i valori medi saranno nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$,...., se b, oltre essere un numerodispari, sarà della forma $4p+1$.

Similmente poi, osservando che quando $a_n=\pm a^n$, si ha $R'_m=\frac{a^{m+1}}{1-a}$, si potrà anche asserire che nel caso di b positivo ma qualunque, come anche nel caso che, essendo ancora b numero dispari, i massimi e minimi di $v_n(y)$ non siano nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$,... o nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, ..., e in generale quando non si rientri in uno dei casi precedenti, la serie $\Sigma\pm a^n v_n(b^n x)$ rappresenterà ancora una funzione di x che, sebbene sempre finita e continua, non avrà mai una derivata determinata e finita, tutte le volte che sia soddisfatta l'una o l'altra delle due condizioni seguenti:

$$(8)\qquad \frac{2Ad}{ab-1}+\frac{2a}{1-a}<1\,,\qquad \frac{5Ad^2}{ab^2-1}+\frac{4a}{1-a}<1\,,$$

con $ab>1$ quando si ha la prima condizione, e $ab\geq 1$ quando si ha la seconda; e se i soliti valori medj di $v_n(y)$ saranno nei punti di mezzo degli intervalli compresi fra un massimo e un minimo consecutivi, allora a queste condizioni si potranno anche sostituire le altre:

$$(9)\qquad \frac{3}{2}\,\frac{Ad}{ab-1}+\frac{2a}{1-a}<1\,,\qquad \frac{3Ad^2}{ab^2-1}+\frac{16}{5}\,\frac{a}{1-a}<1\,;$$

e quando sia soddisfatta la prima di queste ultime condizioni o la prima delle due precedenti si potrà anche asserire che la nostra serie non potrà aver mai neppure una derivata infinita e determinata di segno in nessun punto.

E si può notare che evidentemente insieme alle condizioni (7) dovrà essere $b>1+\frac{3}{2}Ad$, o $b^2>1+3Ad^2$, perchè $a<1$, e insieme alle prime delle condizioni (8) o (9) si dovrà avere $a<\frac{1}{3}$, mentre

insieme alla seconda delle (8) si dovrà avere $a<\frac{1}{5}$, e insieme alla seconda delle (9) basterà invece che sia $a<\frac{5}{21}$.

126. Più particolarmente ancora, prendendo $v_n(y)=\cos y$, o $v_n(y)=\operatorname{sen} y$, si trova che la serie $\Sigma a^n \cos b^n x$ considerata già dal signor *Du Bois Reymond* rappresenta una funzione di x che, sebbene sempre finita e continua, non ha mai una derivata determinata e finita tutte le volte che b è un numero intero dispari, e $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, o $ab^2>1+3\pi^2$, con $ab>1$ nel primo caso e $ab\geq 1$ nel secondo; e lo stesso accade nei medesimi casi per la serie $\Sigma a^n \operatorname{sen} b^n x$ se b oltre essere un numero dispari è della forma $4p+1$. — Inoltre nel primo di questi casi (quello cioè in cui $ab>1+\frac{3}{2}\pi$) la derivata della nostra funzione non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno, ma dovrà o essere infinita e indeterminata di segno in ogni punto o non esistere affatto.

E similmente, anche se non si rientra in questi casi, le serie $\Sigma \pm a^n \cos b^n x$, $\Sigma \pm a^n \operatorname{sen} b^n x$ sebbene rappresentino funzioni di x finite e continue non avranno mai una derivata determinata e finita, tutte le volte che sarà:

$$\frac{3\pi}{2(ab-1)}+\frac{2a}{1-a}<1\,,\ \text{ovvero}\ b>\frac{1}{a}\left(1+\frac{3\pi}{2}\frac{1-a}{1-3a}\right),\ \text{con}\ ab>1\,,$$

o:

$$\frac{3\pi^2}{ab^2-1}+\frac{16}{5}\frac{a}{1-a}<1,\ \text{ovvero}\ b>\sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{1+15\pi^2\frac{1-a}{5-21a}},\ \text{con}\ ab\geq 1,$$

ciò che porta che nel primo caso sia $a<\frac{1}{3}$, e nel secondo sia invece $a<\frac{5}{21}$.

Più particolarmente ancora, prendendo per esempio $b=7$ con $a>\frac{1}{7}\left(1+\frac{3}{2}\pi\right)$, ovvero: $a>0,82$, e prendendo $b=9$ con:

$a > \frac{1}{9}\left(1+\frac{3}{2}\pi\right)$, ovvero: $a \geq 0,64$, si potrà dire che le serie: $\sum_1^\infty a^n \cos 7^n x$, $\sum_0^\infty a^n \cos 9^n x$, $\sum_1^\infty a^n \operatorname{sen} 9^n x$ rappresentano funzioni di x, che sebbene sempre finite e continue, non hanno mai una derivata determinata e finita, o infinita e determinata di segno.

Prendendo $b=31$, o $=33,\ldots$ con $a=\frac{1}{b}$, siccome allora è soddisfatta la condizione $ab^2 > 1+3\pi^2$, e $ab=1$, si conclude che le serie: $\sum \frac{1}{31^n}\cos(31^n x)$, $\sum \frac{1}{33^n}\cos(33^n x)$, $\sum \frac{1}{33^n}\operatorname{sen}(33^n x), \ldots$ non hanno mai una derivata determinata e finita, ec.....

Condizioni analoghe si avrebbero per la non esistenza delle derivate delle funzioni:

$$\sum a_n \cos^{2p_n+1} b_n x\,,\ \sum a_n \operatorname{sen}^{2p_n+1} b_n x\,,\ \sum a_n \operatorname{sn}^{2p_n+1} b_n x\,,\ \sum a_n \operatorname{cn}^{2p_n+1} b_n x, \ldots.$$

ove sn e cn rappresentano le funzioni ellittiche *seno* e *coseno amplitudine* quando il loro modulo è reale e minore di uno ec.

127. Torniamo ora a considerare la serie generale $\Sigma a_n v_n(b_n x)$, limitandosi però per semplicità al caso in cui le a_n sono tutte positive, i massimi e minimi di $v_n(y)$ sono nei punti $0, \pm d, \pm 2d, \ldots$ o sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d, \pm\frac{3}{2}d, \pm\frac{5}{2}d, \ldots$ e i soliti valori medi sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d, \pm\frac{3}{2}d, \ldots$ o nei punti $0, \pm d, \pm 2d, \ldots$, e da un certo valore di n in poi i rapporti $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ sono numeri dispari qualunque o della forma $4p_n+1$.

Allora, ponendo:

$$\frac{\sum_1^{m-1} a_n b^q_n}{a_m b^q_m} = \frac{1}{c_m}, \qquad \text{con } q=1\,,\ \text{o } =2\,,$$

se a partire da un certo valore di m, c_m per $q=1$ sarà superiore a $\frac{3}{2}Ad$, e per $q=2$ sarà superiore a $3Ad^2$, la funzione $\Sigma a_n v_n(b_n x)$

per $q=2$ non avrà mai una derivata determinata e finita, e per $q=1$ questa derivata oltre a non essere mai determinata e finita non potrà mai neppure essere infinita e determinata di segno.

Ora, per $m \geq 2$, dalla posizione precedente si ha:

$$a_1 b^q_1 + a_2 b^q_2 + \cdots + a_{m-2} b^q_{m-2} + a_{m-1} b^q_{m-1} = \frac{a_m b^q_m}{c_m},$$

$$a_1 b^q_1 + a_2 b^q_2 + \cdots + a_{m-2} b^q_{m-2} = \frac{a_{m-1} b^q_{m-1}}{c_{m-1}},$$

quindi sarà:

$$a_{m-1} b^q_{m-1} \left(1 + \frac{1}{c_{m-1}}\right) = \frac{a_m b^q_m}{c_m},$$

e da questa, cangiando m in $m-1$, $m-2$,... 2 e poi moltiplicando, si otterrà la formola seguente:

$$a_m b^q_m = (1+c_1)\,(1+c_2)\,\ldots\,(1+c_{m-1}) \frac{c_m}{c_1} a_1 b^q_1 \tag{10}$$

che varrà anche per $m = 1$, quando allora al prodotto $(1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_{m-1})$ si sostituisca l'unità.

Ma, poichè dalla formola precedente si ha:

$$\frac{a_m}{a_{m-1}} = \left(c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}}\right) \frac{b^q_{m-1}}{b^q_m}.$$

non si potrà alle c_m e b_m lasciare tale arbitrarietà che la quantità $\left(c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}}\right)\frac{b^q_{m-1}}{b^q_m}$ possa avere un limite maggiore dell'unità per $m=\infty$ perchè altrimenti la serie Σa_n sarebbe divergente; e noi per esser sicuri della convergenza di questa serie ammetteremo senz'altro che si debba avere per tutti i valori di m e anche al limite per $m=\infty$:

$$c_m + \frac{c_m}{c_{m-1}} < \frac{b^q_m}{b^q_{m-1}},$$

ciò che porterà che il rapporto $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ dovrà esser superiore a $\frac{3}{2} A d$,

o altrimenti il rapporto $\frac{b^2_m}{b^2_{m-1}}$ dovrà essere superiore a $3Ad^2$, per tutti i valori di m e anche al limite.

Ora, ammettendo date le c_m e superiori a $\frac{3}{2}Ad$ o a $3Ad^2$, e sempre finite, sarà sempre possibile determinare le b_n in modo che la condizione precedente sia soddisfatta e che a partire da un certo valore di n in poi i rapporti $\frac{b_{n+s}}{b_n}$ per s intero siano numeri interi dispari qualunque o anche della forma $4p_s+1$, e allora per mezzo della formula (10) resteranno determinati anche i valori della a_n e solo nel caso di $q=2$ resterà a farsi in modo che non sia lim $a_nb_n=0$; come anche se sono date invece le b_n, e queste crescono indefinitamente con n in modo anche che $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ sia sufficientemente superiore a $\frac{3}{2}Ad$, o $\frac{b^2_m}{b^2_{m-1}}$ sufficientemente superiore a $3Ad^2$, si potranno sempre prendere le c_m in modo che la condizione precedente sia soddisfatta, e con ciò resteranno determinate anche le a_n per mezzo della (10), e solo nel caso di $q=2$ resterà ancora a farsi in modo che non sia $\lim a_nb_n=0$; talchè si potranno così costruire facilmente infinite serie molto semplici $\Sigma a_nv_n(b_nx)$ che rappresentano funzioni che sebbene sempre finite e continue non hanno mai una derivata determinata finita.

128. In particolare dunque, prendendo le c_n costanti e uguali a $\frac{3}{2}\gamma Ad$, o $3\gamma Ad^2$, con γ maggiore di uno, si potrà prendere $b_n=(2p_1+1)(2p_2+1)\dots(2p_n+1)$, purchè a partire da un certo valore di n in poi si abbia nel primo caso $p_n>\frac{3}{4}\gamma Ad$, e nel secondo $2p_n+1>\sqrt{1+3\gamma Ad^2}$; e poichè allora dalla formola (10) in questi casi si ha respettivamente:

$$(11)\left\{\begin{aligned} a_n&=\frac{k(1+\frac{3\gamma}{2}Ad)^n}{(2p_1+1)(2p_2+1)\dots(2p_n+1)},\\ a_n&=\frac{k(1+3\gamma Ad^2)^n}{(2p_1+1)^2(2p_2+1)^2\dots(2p_n+1)^2},\end{aligned}\right.$$

con k costante, si conclude che quando i massimi e minimi di $v_n(y)$ sono nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$, ... e i soliti valori medi sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, ..., la serie $\Sigma a_n v_n(b_n x)$ ove, a_n e b_n hanno gli indicati valori(11), e da un certo valore di n in poi nel primo caso si ha $p_n > \frac{3}{4}\gamma A d$, e nel secondo si ha: $2p_n+1 > \sqrt{1+3\gamma A d^2}$, e $\lim \frac{(1+3\gamma A d^2)^n}{(2p_1+1)(2p_2+1)\ldots(2p_n+1)} > 0$, rappresenterà una funzione di x che sebbene sempre finita e continua non avrà mai una derivata determinata e finita, e nel primo caso non potrà neppure averla infinita e determinata di segno.

Lo stesso poi accadrà anche quando i massimi e i minimi di $v_n(y)$ sono nei punti $\pm\frac{1}{2}d$, $\pm\frac{3}{2}d$, $\pm\frac{5}{2}d$,... e i soliti valori medi sono nei punti 0, $\pm d$, $\pm 2d$, ..., purchè allora le p_n da un certo valore di n in poi siano numeri pari.

129. Queste serie al solito, quando si prenda $v_n(y) = \cos y$, $v_n(y) = \operatorname{sen} y$, si riducono alle due $\Sigma a_n \cos b_n x$, $\Sigma a_n \operatorname{sen} b_n x$, che, quando a_n e b_n soddisfano alle condizioni ora indicate, non hanno mai una derivata determinata e finita.

In particolare prendendo $p_1=1$, $p_1=2$, ... $p_n=n$, si ha che la serie:

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)} \cos[1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)x],$$

ove $\alpha > 1+\frac{3}{2}\pi$, rappresenta una funzione di x che sebbene sempre finita e continua non ha mai derivata determinata e finita.

Lo stesso accade della serie:

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{1\,.\,5\,.\,9\ldots(4n+1)} \operatorname{sen}[1\,.\,5\,.\,9\ldots(4n+1)x],$$

per $\alpha > 1+\frac{3}{2}\pi$, ec...

Altre considerazioni generali riguardanti specialmente la esistenza delle derivate delle funzioni finite e continue (*).

130. A complemento di quanto abbiamo esposto intorno alle derivate delle funzioni finite e continue in un dato intervallo, trovo ora opportuno di aggiungere le considerazioni seguenti.

Sia $f(x)$ una funzione finita e continua di x in tutto un intervallo (a, b) (gli estr. inclus.) nel quale essa ammette una derivata sempre determinata e finita $f(x)$. Se un punto *interno* di questo intervallo appartiene a un tratto di invariabilità di $f(x)$, o se in esso la funzione è massima o minima, la sua derivata $f'(x)$ in quel punto (essendo determinata e finita) dovrà essere zero; e perciò se in qualunque porzione dell'intervallo (a, b) la funzione $f(x)$ senza essere sempre costante avesse sempre dei tratti d'invariabilità o dei massimi e minimi, la sua derivata $f'(x)$ dovrebbe essere zero in infiniti punti di qualunque porzione comunque piccola dell'intervallo stesso. Segue da ciò (§. 45) che se la derivata $f'(x)$ di una tal funzione $f(x)$, oltre essere determinata e finita in tutto l'intervallo, in un punto x' fosse anche continua, essa dovrebbe essere zero anche in questo punto; e se fosse continua in tutto l'intervallo essa sarebbe sempre zero, e allora $f(x)$ sarebbe sempre costante; quindi si può evidentemente asserire che:

1.° *Se una funzione $f(x)$ senza essere sempre costante ha dei tratti d'invariabilità o dei massimi e minimi in un intervallo nel quale essa ammette una derivata sempre finita e continua, in qualsiasi porzione dell'intervallo stesso che non corrisponda a un tratto d'invariabilità dovranno esisterne altre nelle quali la funzione non fa oscillazioni ed è sempre crescente o sempre decrescente.*

2.° *Se una funzione $f(x)$ in qualsiasi porzione di un intervallo*

(*) Gli studii che io raccolgo in questo capitolo sono stati fatti dopo che la stampa dei capitoli precedenti era quasi compiuta. Questa circostanza spiegherà facilmente come sia avvenuto che nei capitoli precedenti si trovino dei teoremi o delle osservazioni che, dopo di avere rinvenuto i teoremi più generali che ora darò, avrebbero potuto benissimo omettersi, tenendo un ordine un poco differente.

(a, b) nel quale non è sempre costante ha sempre dei tratti d'invariabilità o dei massimi e minimi, la sua derivata non potrà essere determinata e finita in ogni punto a meno che non sia infinite volte discontinue (§. 26); *e allora* (§. 78) *queste discontinuità della derivata $f'(x)$ dovranno essere tutte di seconda specie, e nei punti ove si ha continuità la derivata stessa dovrà essere uguale a zero.*

Da questo poi si può anche evidentemente inferirne che per le funzioni finite e continue che in un dato intervallo non hanno sempre uno stesso valore ma in qualunque porzione dell'intervallo stesso hanno sempre dei tratti d'invariabilità o dei massimi e minimi, non potrà mai parlarsi di derivata seconda, e il più spesso neppure sarà da parlarsi della loro derivata prima; e quindi non potrà mai applicarsi loro il calcolo differenziale, almeno quando oltre alla prima si vogliono considerare le derivate di ordine superiore.

131. Sia ora $f(x)$ una funzione finita e continua di x in tutto un intervallo (a, b) (gli estr. inclus.), e nei punti di questo intervallo essa ammetta una derivata numericamente inferiore a un dato numero positivo A, o almeno sia tale che per ogni punto x il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ coll'impiccolire indefinitamente di h per valori positivi o per valori negativi, sebbene possa non tendere verso alcun limite determinato, finisca per mantenersi sempre numericamente inferiore a un dato numero positivo A (*). Questa funzione $f(x)$ potrà in vicinanza di alcuni punti o in tutto l'intervallo (a, b) avere o nò infiniti massimi e minimi, o presentare dei tratti d'invariabilità, però è facile vedere che da essa se ne potrà sempre dedurre un altra per la quale non si hanno oscillazioni nè tratti d'invariabilità, mentre però restano le stesse le particolarità relative alla derivata o al rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Si formi infatti la funzione:

$$F(x) = \mp f(x) + A\varphi(x),$$

(*) A questa classe appartengono evidentemente anche le funzioni per le quali l'intervallo (a, b) può dividersi in porzioni tali che in ogni intervallo preso in esse il rapporto dell'oscillazione della funzione all'intervallo corrispondente è sempre inferiore a un numero finito.

ove $\varphi(x)$ è la funzione di primo grado $x+\frac{B}{A}$(B cost.) o più generalmente è una funzione di x fra a e b che, se p. es. $a>b$, oltre essere sempre finita e continua, è sempre crescente da a a b e ammette sempre una derivata positiva e non inferiore all'unità, o almeno è tale che per tutti i valori di x fra a e b il rapporto $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ col tendere di h a zero per valori positivi o per valori negativi finisce per non essere mai inferiore alla unità positiva.

Per la funzione $F(x)$ si avrà:

$$\frac{F(x\pm h)-F(x)}{\pm h}=\pm\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}+A\frac{\varphi(x\pm h)-\varphi(x)}{\pm h};$$

quindi per ogni valore di x fra a e b, quando h è positivo e sufficientemente piccolo, si avrà sempre evidentemente:

$$F(x+h)-F(x)>0\,,\qquad F(x-h)-F(x)<0\,,$$

e perciò questa funzione $F(x)$ nell'*interno* dell'intervallo (a, b) non potrà avere tratti d'invariabilità o avere massimi o minimi, e quindi sarà sempre crescente fra a e b.

Similmente si troverebbe che la funzione $\pm f(x)-A\varphi(x)$ è sempre decrescente fra a e b; quindi osservando anche che se si pone:

$$F_1(x)=f(x)+A\varphi(x)\,,\quad F_2(x)=-f(x)+A\varphi(x)\,,$$
$$F_3(x)=f(x)-A\varphi(x)\,,\quad F_4(x)=-f(x)-A\varphi(x)\,,$$

si ha:

$$f(x)=\frac{F_1+F_3}{2}=-\frac{F_2+F_4}{2}=\frac{F_1-F_2}{2}=\frac{F_3-F_4}{2},$$

e anche:

$f(x)=F_1(x)-A\varphi(x)\,,\ldots.$

si concluderà subito intanto che se $f(x)$ è una funzione finita e continua di x in tutto un intervallo (a, b) nel quale ha sempre una derivata determinata e numericamente inferiore a un numero finito A, o almeno è tale che il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per ogni valore di x coll'impiccolire di h per valori positivi o per valori nega-

gativi, sebbene possa non tendere verso alcun limite determinato, finisce per mantenersi sempre numericamente inferiore a un dato numero finito A, allora, quand'anche questa funzione in vicinanza di punti speciali o in tutto l'intervallo (a, b) abbia dei massimi o minimi, o presenti dei tratti d'invariabilità, cangiando se si vuole il suo segno e aggiungendole la funzione di primo grado $\pm Ax+B$, o anche una funzione più generale $\pm A\varphi(x)$ determinata come si disse sopra, si formerà sempre una funzione $F(x)=\pm f(x)\pm A\varphi(x)$ che non farà più oscillazioni fra a e b e sarà sempre crescente o sempre decrescente; e in questo caso la funzione data $f(x)$, quand'anche, come si è detto, presenti infiniti tratti d'invariabilità o infiniti massimi e minimi potrà sempre riguardarsi come somma di due funzioni l'una sempre crescente e l'altra sempre decrescente, o come differenza di due funzioni ambedue crescenti o ambedue decrescenti.

132. La funzione sempre crescente $\varphi(x)$ che moltiplicata per la costante positiva A si aggiunge o si toglie a $f(x)$ onde farle perdere i massimi e i minimi o i tratti d'invariabilità, formando così una funzione $F(x)$ senza oscillazioni fra a e b e sempre crescente o sempre decrescente, potrà come abbiamo detto essere una funzione di primo grado, o più generalmente, essere una funzione che ammetta una derivata determinata sempre finita e non inferiore all'unità. Allora la nuova funzione $F(x)=\pm f(x)\pm A\varphi(x)$ rispetto alla derivata si comporterà come la funzione primitiva $f(x)$, e il rapporto $\frac{F(x\pm h)-F(x)}{\pm h}$ sarà sempre compreso fra due numeri α e β ambedue positivi o ambedue negativi e diversi da zero; quindi si può anche evidentemente concludere (come già enunciammo sopra) che partendo da una funzione $f(x)$ che rispetto al rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ goda delle proprietà suindicate, che manchi di derivata in tutti o in alcuni punti dell'intervallo (a, b), e che abbia dei tratti d'invariabilità o che in vicinanza di alcuni punti speciali o in tutto l'intervallo abbia dei massimi o dei minimi, si potrà sempre formare una funzione $\pm f(x)\pm Ax$ (o più generalmente $\pm f(x)\pm A\varphi(x)$) che non abbia oscillazioni e sia sempre

crescente o sempre decrescente e che manchi ancora di derivata negli stessi punti soltanto.

In particolare dunque prendendo per $f(x)$ le funzioni:

$$f_1(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}\sqrt{\operatorname{sen}^2 nx\pi}\ ,\ f_2(x)=\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen} nx\pi \operatorname{sen}[\log \operatorname{sen}^2 nx\pi]}{n^s}$$

degli esempi 1.° e 2.° del §. 116, si può asserire che, se A è una costante positiva abbastanza grande, le funzioni $\pm f_1(x)\pm Ax$, $\pm f_2(x)\pm Ax$ che si deducono da $f_1(x)$ e da $f_2(x)$ non fanno mai oscillazioni, sono sempre crescenti o sempre decrescenti, e mancano ancora di derivata in tutti i punti razionali; e propriamente nei punti razionali per la prima esistono le derivate a destra e quelle a sinistra dei singoli punti, ma sono differenti le une dalle altre, mentre per la seconda sì le derivate a destra che quelle a sinistra non esistono affatto.

E se s' indicano con $i_1, i_2, \ldots i_m$ dei numeri irrazionali tali che i loro rapporti siano ancora irrazionali, si vede pure che le funzioni:

$$F(x)=a_0 f_1(x)+a_1 f_1\left(\frac{x}{i_1}\right)+a_2 f_1\left(\frac{x}{i_2}\right)+\ldots+a_m f_1\left(\frac{x}{i_m}\right)\pm Ax\ ,$$

$$F(x)=b_1 f_2(x)+b_1 f_2\left(\frac{x}{i_1}\right)+b_2 f_2\left(\frac{x}{i_2}\right)+\ldots+b_m f_2\left(\frac{x}{i_m}\right)\pm Ax\ ,$$

quando le $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, b_m$ sono costanti diverse da zero e A è un altra costante positiva e abbastanza grande, sono sempre crescenti o sempre decrescenti, e mancano di derivata in tutti i punti razionali e in tutti i punti irrazionali corrispondenti ai valori di x della forma: $x=i_1\alpha$, $x=i_2\alpha, \ldots x=i_m\alpha$, ove α è un numero razionale qualunque; talchè chiaro di quì apparisce che la mancanza della derivata in alcune funzioni anche in un numero infinito di punti di qualsiasi intervallo comunque piccolo, non può, almeno in tutti i casi, essere attribuita alla presenza di infiniti massimi e minimi o di infiniti tratti di invariabilità nelle funzioni stesse.

Si deve poi notare che se per $\varphi(x)$ si prende una funzione

per la quale il rapporto $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ coll' impiccolire di h per valori positivi o per valori negativi si mantiene sempre superiore o uguale all'unità positiva, e almeno per alcuni valori di x finisce per prendere anche valori arbitrariamente grandi positivi, allora la funzione $F(x)=\pm f(x)\pm A\varphi(x)$ sarà ancora sempre crescente o sempre decrescente, e il rapporto $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, almeno per alcuni valori di x, coll'impiccolire di h oscillerà fra 0 e ∞ o fra 0 e $-\infty$ respettivamente.

133. Ammettiamo ora che la nostra funzione $f(x)$, mantenendosi ancora finita e continua nell'intervallo (a, b), sia tale che il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, almeno per alcuni valori di x fra a e b, coll' impiccolire di h per valori positivi o per valori negativi, p. es. per valori positivi, possa anche finire per prendere valori maggiori di quantità arbitrariamente grandi date; ma se ciò avviene i segni di questi valori grandissimi siano sempre gli stessi per ciascuno dei valori di x (in numero finito o infinito) pei quali questa circostanza si presenta, per modo cioè che allora il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, considerato per ogni valore di x fra a e b, coll'impiccolire di h per valori positivi finisca per non potersi riguardare come compreso altro che fra c e $+\infty$ o fra c e $-\infty$, essendo c un numero finito positivo o negativo (senza però che queste condizioni esigano che per alcuni valori di x si abbia necessariamente: $\lim_{h=+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=+\infty$, o $=-\infty$).

Allora, supponendo dapprima che per tutti i valori di x fra a e b il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h si avvicina indefinitamente a zero per valori positivi finisca per trovarsi sempre compreso fra c e β, essendo c un numero finito e positivo e β un altro numero positivo esso pure ma che può essere $+\infty$, si osserverà che per ogni punto x *interno* all'intervallo (a, b) e per $x=a$ quando h avrà valori sufficientemente piccoli e positivi dovrà

sempre essere $f(x+h)-f(x)>0$, e si vedrà perciò che nei punti *interni* all'intervallo (a, b) la funzione $f(x)$ non può avere tratti d'invariabilità o avere massimi, e neppure potrà avere minimi, perchè altrimenti se avesse un minimo p. es. in un punto *interno* α, in un altro punto α_1 *interno* all'intervallo (a, α) dovrebbe avere un massimo, e questo non può essere; quindi nel caso considerato la funzione $f(x)$ sarà sempre crescente fra a e b e il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ anche per h negativo sarà sempre compreso esso pure fra c e β o almeno fra 0 e ∞.

Invece se c è negativo, β restando ancora positivo e potendo essere $+\infty$, la funzione $f(x)$ fra a e b avrà dei massimi e dei minimi e potrà anche presentare dei tratti d'invariabilità; però allora indicando con A una quantità positiva superiore al valore assoluto di c, e considerando la funzione $F(x)=f(x)+A\varphi(x)$, ove $\varphi(x)$ è scelta nel modo indicato nei due paragrafi precedenti, si ricadrà nel caso considerato ora, e quindi questa funzione $F(x)$ sarà essa pure sempre crescente, e quando si prenda A abbastanza grande, il rapporto corrispondente $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ pei varii valori di x coll'impiccolire di h tanto per valori positivi che per valori negativi rimarrà sempre compreso fra α e β' essendo α diverso da zero e positivo, e β' essendo positivo e potendo anche essere $+\infty$.

Similmente se β è negativo, potendo anche essere $-\infty$, e c è positivo o negativo ma finito e superiore a β, la funzione $f(x)$ sarà sempre decrescente o diverrà tale riducendola ad un altra $F(x)$ col togliervi la solita funzione $A\varphi(x)$; quindi ammettendo d'ora innanzi di prendere sempre $\varphi(x)=x+\frac{B}{A}$, o almeno di scegliere $\varphi(x)$ in modo che fra a e b abbia sempre una derivata determinata e finita positiva e non inferiore all'unità, e osservando che allora la funzione $F(x)$ avrà la derivata quando l'ha $f(x)$ e viceversa, si può ora asserire che in questi casi in cui per tutti i valori di x fra a e b il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, considerato al tendere di h a zero per valori sempre positivi (o per valori sempre negativi),

si mantiene sempre compreso fra due limiti uno almeno dei quali è finito, la funzione $f(x)$, se fra a e b ha delle oscillazioni o dei tratti d'invariabilità, darà sempre luogo a un altra funzione $F(x)=f(x)\pm A\varphi(x)$ sempre crescente o sempre decrescente che avrà una derivata quando l'ha $f(x)$ e viceversa; e per questa funzione $F(x)$ il rapporto $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ pei varii valori di x e coll'impiccolire di h tanto per valori positivi che per valori negativi varierà soltanto fra α e β o fra $-\alpha$ e $-\beta$, essendo α e β quantità positive e diverse da zero, la seconda delle quali può anche essere infinita.

Viceversa se una funzione finita e continua $f(x)$ in un dato intervallo (a, b) non ha massimi o minimi, o almeno li perde tutti quando le si aggiungono o si tolgono certe funzioni di primo grado $Ax+B$ (o più generalmente delle funzioni della forma $A\varphi(x)$ ove A è una costante positiva sufficientemente grande, e $\varphi(x)$ è scelta nel modo più volte indicato), il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per per ogni valore di x fra a e b col tendere a zero di h per valori sempre positivi finirà per mantenersi sempre compreso fra due limiti uno almeno dei quali è sempre inferiore a un certo numero finito.

Questi risultati generalizzano quelli dei paragrafi precedenti, e mostrano anche che nel caso in cui il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ goda della proprietà suindicata, di finire cioè per mantenersi sempre compreso fra due limiti uno almeno dei quali è finito, la funzione $f(x)$, per quanto possa avere infiniti massimi e minimi o infiniti tratti d'invariabilità può sempre riguardarsi come somma o differenza di due funzioni una sempre crescente e l'altra sempre decrescente, o ambedue decrescenti, ec.

Inoltre le considerazioni testè fatte ci mostrano che se coll'impiccolire di h per valori p. es. sempre *positivi* il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ finisce per mantenersi sempre compreso fra due limiti α e β uno almeno dei quali in valore assoluto non supera

mai una quantità finita, lo stesso accadrà anche quando h tenderà a zero per valori *negativi*, e i limiti α e β potranno supporsi li stessi nei due casi; e perciò se lo stesso rapporto, col tendere a zero di h per valori p. es. positivi, per alcuni valori di x prende anche valori arbitrariamente grandi positivi e negativi per modo da dover dire che varia fra $-\infty$ e $+\infty$, lo stesso accadrà col tendere a zero di h per valori negativi. Ciò del resto apparirà meglio anche da quanto diremo fra poco.

134. Le considerazioni che ora abbiamo esposto ci conducono alle seguenti.

Si osservi che se fra le varie funzioni finite e continue in un intervallo (a, b) si considerano separatamente quelle nelle quali il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, almeno per alcuni valori di x, coll'impiccolire di h per valori positivi o per valori negativi finisce per prender anche valori arbitrariamente grandi positivi e valori arbitrariamente grandi negativi, e quelle per le quali, questa singolarità non presentandosi, il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ coll' impiccolire di h per valori positivi o per valori negativi, p. es. per valori positivi, qualunque sia x finisce sempre per variare fra due limiti uno almeno dei quali in valore assoluto non supera un certo numero finito, allora le prime di queste funzioni continueranno a fare oscillazioni qualunque funzione si aggiunga o si tolga loro che abbia sempre una derivata determinata e finita, mentre le seconde, anche se fanno infinite oscillazioni o presentano infiniti tratti d'invariabilità fra a e b, coll'aggiungere loro funzioni convenienti, per le quali può anche essere presa una funzione di primo grado $Ax+B$, verranno sempre a perdere tutti i tratti d'invariabilità e tutti i massimi e i minimi; e inoltre queste nuove funzioni $F(x)$ mentre non presenteranno più oscillazioni e saranno sempre crescenti o sempre decrescenti, rispetto alla esistenza della derivata si comporteranno precisamente come la primitiva $f(x)$, e per esse il rapporto corrispondente $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ qualunque sia x col tendere a zero di h per valori positivi e per valori negativi

varierà soltanto fra due limiti dello stesso segno α e β uno dei quali sarà diverso da zero, e l'altro potrà anche essere infinito.

È evidente poi che una funzione che in un dato intervallo appartenga p. es. alla prima di queste due classi non potrà mai ridursi della seconda o viceversa coll'aggiungervi o togliervi una funzione $\omega(x)$ che abbia sempre una derivata determinata e finita, perchè per questa si ha sempre: $\frac{\omega(x+h)-\omega(x)}{h}=\omega'(x+\theta h)$ (θ positivo e compreso fra 0 e 1); quindi per lo studio delle funzioni finite e continue, quando si deve avere riguardo ai loro massimi e minimi e ai tratti d'invariabilità che esse possono presentare, potrà talvolta tornar comodo di fare la distinzione che viene suggerita da queste considerazioni; e noi perciò, almeno nei casi in cui potrà tornare opportuno, chiameremo *funzioni continue di seconda specie o funzioni oscillanti irriducibili* le funzioni della prima classe e *funzioni continue di prima specie* le altre, venendo così ad essere funzioni continue di prima specie in un dato intervallo quelle funzioni che in ogni punto x ammettono una derivata a destra (o a sinistra) sempre determinata e inferiore a un numero finito, e più generalmente quelle per le quali qualunque sia x il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, col tendere di h a zero anche soltanto per valori positivi, finisce per essere sempre compreso fra due limiti uno almeno dei quali è finito; ed essendo invece funzioni di seconda specie quelle (come p. es. alcune e forse tutte le funzioni del capitolo precedente) per le quali lo stesso rapporto deve necessariamente considerarsi come compreso fra $-\infty$ e $+\infty$.

Con questa distinzione le funzioni continue di prima specie, anche se avranno infiniti massimi e minimi, o infiniti tratti d'invariabilità, li verranno a perdere tutti e si ridurranno sempre crescenti o sempre decrescenti coll'aggiungere o togliere loro convenienti funzioni che abbiano sempre una derivata determinata e finita e diversa da zero, per le quali può anche sempre esser presa una funzione di primo grado $Ax+B$; e inoltre queste funzioni potranno in ogni caso riguardarsi come somma o differenza

di funzioni sempre crescenti o sempre decrescenti. Invece le funzioni di seconda specie, nell'intervallo dato, avranno sempre dei massimi e minimi che non si potranno fare sparire col procedimento che ora abbiamo indicato per quelle di prima specie; e se una funzione sarà di seconda specie in *qualunque* porzione dell'intervallo nel quale si considera, in ciascuna di queste porzioni essa avrà infiniti massimi e minimi.

Le funzioni di prima specie poi in ciascuno dei punti ove hanno una derivata infinita l'avranno determinata di segno, e questo segno sarà lo stesso in tutti quei punti; mentre per le funzioni di seconda specie, la derivata ove esiste ed è infinita potrà anche essere indeterminata di segno, ec.

Talvolta poi quando si avrà una funzione di seconda specie, potrà darsi che togliendo dall'intervallo totale alcuni punti speciali per mezzo dei loro intorni (come avviene p. es. per la funzioni $x\,\text{sen}\frac{1}{x}$ quando si toglie il punto $x=0$), negli intervalli restanti essa sia soltanto di prima specie, ec.

135. Si osservi ora che se si ammettesse che una funzione $f(x)$, sempre finita e continua fra a e b, a destra o a sinistra di ogni punto, p. es. a destra, avesse una derivata ma sempre infinita e dello stesso segno, allora le funzioni che si ricaverebbero da $f(x)$ coll'aggiungervi o togliervi qualsiasi funzione di primo grado $Ax+B$ sarebbero nello stesso caso di $f(x)$, e quindi sarebbero tutte sempre crescenti fra a a b, o tutte sempre decrescenti; mentre si sà p. es. (§. 71) che la funzione:

$$f(x)-f(a)-\frac{x-a}{b-a}\left\{f(b)-f(a)\right\}$$

o è sempre zero o ha necessariamente un massimo o un minimo in un punto interno all'intervallo (a, b); dunque mentre, in aggiunta ai risultati dei §§. 71 e 79, si può ora affermare che: *Una funzione sempre finita e continua $f(x)$ non può avere la derivata a destra (o a sinistra) di ogni punto di un dato intervallo sempre infinita e dello stesso segno,* si può affermare altresì che le funzioni (se pure esistono) che hanno sempre infinita la derivata

presa da una stessa parte in ogni punto di un dato intervallo, debbono averla di segni differenti almeno in alcuni punti di qualsiasi porzione anche ristrettissima dell'intervallo stesso, e non possono essere che funzioni di seconda specie.

136. Nei punti o negli intervalli nei quali la derivata di una funzione $f(x)$ non esiste, o almeno si è incerti intorno alla esistenza di essa, non potendo considerare insieme, e talvolta neppure separatamente, i limiti del rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per h tendente a zero per valori positivi e per valori negativi, sarà naturale di prendere ad esaminare direttamente questo rapporto per ogni valore speciale di x fra a e b, o almeno i limiti fra i quali questo rapporto oscilla coll'impiccolire indefinitamente di h, e ciò considerando separatamente quello corrispondente ai valori positivi di h da quello corrispondente ai valori negativi; e allora si giungerà a risultati assai generali, alcuni dei quali comprendono, come casi particolari, anche molti di quelli che già abbiamo ottenuto.

Chiameremo perciò, per brevità di linguaggio, *rapporto incrementale* il rapporto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; e chiameremo *rapporto incrementale destro* quello corrispondente ad h positivo, e *rapporto incrementale sinistro* quello corrispondente ad h negativo.

Essendo ora $f(x)$ una funzione qualunque di x finita e continua fra a e b (a e b incl.), per ogni valore speciale che si attribuisce ad x in questo intervallo (b escl. se $b>a$) il rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ potrà riguardarsi come una funzione finita e continua di h per tutti i valori di h compresi in ogni intervallo preso fra 0 e $b-x$ (0 escl.); però, sebbene sempre finito, questo rapporto potrà avere per limite superiore dei suoi valori assoluti l'infinito, e rimarrà sempre compreso fra due numeri α e β uno dei quali o tutti e due potranno anche essere infiniti, essendo però in quest'ultimo caso uno di questi numeri uguale a $+\infty$ e l'altro uguale a $-\infty$.

Così essendo, per ogni valore particolare di x fra a e b (b escl.) questo rapporto incrementale destro, considerato per tutti i valori

di h fra 0 e $b-x$ (0 escl.), ammetterà un limite inferiore finito o infinito l_x, e un limite superiore finito pure o infinito L_x (§. 15); e a causa della continuità, quando l_x è finito per *infiniti* valori di h il detto rapporto prenderà valori vicini quanto si vuole a l_x, e in alcuni casi prenderà una o più volte anche il valore l_x stesso; e similmente, quando L_x è finito per *infiniti* valori di h prenderà valori vicini quanto si vuole a L_x e talvolta anche il valore L_x stesso; mentre se l'uno o l'altro dei due limiti l_x e L_x è infinito, lo stesso rapporto per *infiniti* valori di h prenderà valori maggiori di quella quantità che più ci piace e del segno di l_x o L_x respettivamente.

Considerando ora questi limiti inferiori e superiori l_x e L_x per ogni valore di x fra a e b (b escl. perchè supponiamo $b>a$), è chiaro che essi saranno funzioni, continue o nò, finite o infinite, di x in ogni porzione dell'intervallo (a, b) che non termini al punto b; e inoltre, per ogni *valore speciale* che si attribuisca ad x fra a e b, potranno evidentemente considerarsi anche come funzioni di b per tutti i valori di b corrispondenti ai punti di ogni porzione dell'intervallo (x, b) che non termini al punto x.

Limitandoci dapprima a considerare l_x e L_x come funzioni soltanto di x per tutti i valori di x fra a e b (b escl.), si avrà un limite inferiore finito o infinito l per l_x, e un limite superiore finito o infinito L per L_x; quindi si hanno così intanto due numeri *determinati* l e L fra i quali è sempre compreso il rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per ogni valore di x fra a e b (b escl.) e pei valori di h fra 0 e $b-x$ (0 escl.); e se, onde ridurre l_x e L_x vere e proprie funzioni di x, finite però o infinite, *in tutto* l'intervallo (a, b), s'intende che anche per $x=b$ siano attribuiti a l_x e a L_x due valori qualunque compresi fra l e L (l e L p. es. escl.), allora per il teorema di Weierstrass (§. 36) si potrà affermare che se l è finito esisteranno sempre fra a e b (a e b inclus.) uno o più punti x_0 tali che in ogni loro intorno il limite inferiore dei valori di l_x sarà ancora l, per modo cioè che in alcuni punti x di questi intorni per infiniti valori h_1 di h il rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}$ prenderà valori $l+\varepsilon$ (ε posit.) vicini

quanto si vuole a l; e similmente se L è finito esisteranno dei punti x'_0 negli intorni dei quali il limite superiore dei valori di L_x sarà ancora L, per modo quindi che in alcuni punti x' di questi intorni per infiniti valori h'_1 di h il rapporto incrementale destro $\frac{f(x'+h'_1)-f(x')}{h'_1}$ prenderà valori $L-\varepsilon'$ (ε' posit.) vicini quanto si vuole a L; come anche infine, se l o L o tutti e due questi limiti sono infiniti, esisteranno dei punti x''_0 tali che il rapporto $\frac{f(x''+h''_1)-f(x'')}{h''_1}$ in alcuni punti x'' dei loro intorni per infiniti valori h''_1 di h prenderà anche valori grandi quanto si vuole e dei segni di l o L respettivamente.

137. Se poi indichiamo con l' e L' i valori corrispondenti fra i quali è sempre compreso il rapporto incrementale sinistro $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ per x compreso fra a e b (a escl.), e h positivo e compreso fra 0 e $x-a$ (0 escl.), supposti determinati questi valori l' e L' col processo stesso che ci ha servito a determinare i numeri analoghi l e L pel rapporto incrementale destro (dopo cioè di avere determinato pel rapporto incrementale sinistro $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ le funzioni l'_x e L'_x analoghe alle l_x e L_x), sarà facile vedere che dovrà essere $l'=l$, e $L'=L$.

Ammettiamo infatti che separatamente o nello stesso tempo possa avvenire che l' sia differente da l, e L' sia differente da L; e indichiamo allora con α un numero compreso fra l e l' e con β un numero compreso fra L e L'.

Prendendo a esaminare le funzioni:

$$\varphi(x)=f(x)-\alpha x\,, \qquad \psi(x)=f(x)-\beta x\,,$$

per i significati respettivi delle quantità l e L, l' e L' si vedrà subito che, qualunque sia x fra a e b, se $l'<l$ si dovrà avere sempre: $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}>0$, e se invece $l'>l$ si dovrà avere: $\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{-h}>0$, mentre se $L'<L$ si dovrà avere sempre:

$\frac{\psi(x-h)-\psi(x)}{-h}<0$, e se $L'>L$ si dovrà avere: $\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}<0$, essendo h positivo; talchè in tutti i casi $\varphi(x)$ dovrà essere sempre crescente fra a e b, e $\psi(x)$ dovrà essere sempre decrescente.

Ma d'altra parte, per l'osservazione fatta in fine del paragrafo precedente, dovranno anche esistere dei valori di x e di h pei quali si abbia:

$$\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{-h}<0 \text{ per } l'<l, \qquad \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}<0 \text{ per } l'>l,$$

e:

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}>0 \text{ per } L'<L, \qquad \frac{\psi(x-h)-\psi(x)}{-h}>0 \text{ per } L'>L;$$

quindi evidentemente siamo in contradizione, e ciò anche se alcuna delle quantità l, l', L, L' è infinita, e conviene perciò ammettere che debba essere $l'=l$, e $L'=L$ come dicevamo sopra.

Farò osservare che pel caso di $l=-\infty$, $L=\infty$ questa proprietà risultava già da quanto si disse in fine del §. 133.

138. Segue da ciò che determinate le funzioni l_x e L_x dei limiti inferiori e superiori del rapporto incrementale destro di $f(x)$ fra a e b, e le funzioni corrispondenti l'_x e L'_x per il rapporto incrementale sinistro, i limiti inferiori di l_x e l'_x, e così i limiti superiori di L_x e L'_x saranno gli stessi; talchè (a complemento anche di quanto abbiamo detto nei paragrafi precedenti) si può ora asserire che per qualunque funzione finita e continua $f(x)$ esisteranno due numeri bene determinati l e L fra i quali saranno sempre compresi i rapporti incrementali destro e sinistro $\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}$; e per il teorema di Weierstrass ricordato sopra, questi numeri l e L godranno della proprietà che esisteranno sempre dei valori speciali x_l, x_L di x fra a e b (a e b incl.) dotati della proprietà che in ogni loro intorno i numeri l e L respettivamente saranno ancora li stessi, per modo che quando questi numeri sono finiti, in alcuni punti x' di ogni intorno di x_l o di x_L per infiniti valori convenienti di h (tali che anche il punto $x'+h$ cada fra a e b) il rapporto

incrementale destro $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ sarà vicino respettivamente a l o a L quanto si vuole, e in alcuni punti x'' degli stessi intorni il rapporto incrementale sinistro $\frac{f(x''-h)-f(x'')}{-h}$ sarà pure vicino ad essi quanto si vuole; e similmente se uno o tutti e due i numeri l e L sono infiniti, allora per valori x' di x scelti in ogni intorno degli stessi punti x_l e x_L i rapporti incrementali medesimi $\frac{f(x'\pm h)-f(x')}{\pm h}$ per infiniti valori convenienti di h saranno maggiori di quella quantità che più ci piace e avranno il segno di l o di L respettivamente.

139. Esaminando poi in particolare le funzioni l_x e L_x, l'_x e L'_x per qualsiasi funzione finita e continua $f(x)$, è facile vedere che quando in un punto x le due funzioni l_x e l'_x siano ambedue finite e continue dovrà essere $l_x=l'_x$; e similmente se L_x e L'_x sono ambedue finite e continue dovrà essere $L_x=L_x'$.

Nel primo caso infatti preso un piccolo intorno del punto x che poi si farà impiccolire indefinitamente, il limite inferiore comune l_1 di l_x e l'_x in quest'intorno finirà per differire tanto poco quanto si vuole da l_x e da l'_x, e nel secondo caso il limite superiore comune L_1 di L_x e di L'_x finirà per differire tanto poco quanto si vuole da L_x e da L'_x, e perciò si avrà respettivamente $l_x=l'_x$, e $L_x=L'_x$ come abbiamo enunciato; talchè, particolarizzando, si può anche affermare che, negli intervalli nei quali sono finite e continue, le funzioni l_x e l'_x, limiti inferiori dei rapporti incrementali destro e sinistro di $f(x)$ nel punto x, sono le stesse, e così pure accade per le funzioni L_x e L'_x, limiti superiori degli stessi rapporti, pei punti x degli intervalli nei quali sono finite e continue.

140. La considerazione dei numeri l e L conduce a una proprietà molto notevole delle funzioni finite e continue. Però prima di dimostrare questa proprietà è utile premettere alcune osservazioni intorno ai rapporti incrementali.

Sia perciò $f(x)$ la solita funzione finita e continua nell'intervallo (a, b). Prendiamo in questo intervallo una porzione qualsiasi (α, β), e consideriamo in essa la funzione:

$$\varphi(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\{f(\beta)-f(\alpha)\}.$$

Osservando che questa funzione o deve essere sempre nulla, o in un punto determinato x_1 *interno* all'intervallo (α, β) deve avere un massimo o un minimo (§. 71), si vedrà subito che fra α e β vi sarà sempre almeno un punto *interno determinato* x_1 tale che per tutti i valori positivi di h inferiori a un dato limite si avrà sempre:

$$\varphi(x_1\pm h)-\varphi(x_1)\leq 0, \text{ o sempre: } \varphi(x_1\pm h)-\varphi(x_1)\geq 0,$$

e quindi sarà o:

$$(1) \quad \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}, \text{ e: } \frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h}\geq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha},$$

o:

$$(2) \quad \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\geq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}, \text{ e: } \frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h}\leq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

D'altra parte se la funzione $\varphi(x)$ fra α e β non avrà altri massimi o minimi, o ne avrà soltanto un numero finito, allora, scomponendosi l'intervallo (α, β) in intervalli di ampiezza *finita* in alcuni dei quali la funzione stessa $\varphi(x)$ è sempre crescente e negli altri è sempre decrescente, per ogni punto x di questi intervalli (gli estremi escl.) e per tutti i valori di h inferiori a dati limiti si avrà sempre:

$$\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}\leq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}, \text{ o sempre: } \frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}\geq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha};$$

mentre se la funzione $\varphi(x)$ fra α e β avrà un numero infinito di massimi e minimi, allora insieme a infiniti punti x_1 pei quali si hanno le (1) esisteranno anche infiniti punti x_1 pei quali si hanno invece le (2); quindi, riassumendo ora coll'osservare anche che i rapporti incrementali destro e sinistro, e così anche $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, sono sempre compresi fra l e L, si potrà evidentemente asserire

che: “ in ogni porzione (α, β) dell'intervallo (a, b) nel quale $f(x)$
“ è finita e continua e a cui appartengono i numeri limiti l e L,
“ esistono sempre:

“ 1.° Infiniti punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro
“ $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ quando h è ridotto sufficientemente piccolo si
“ mantiene sempre compreso fra l e $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

“ 2.° infiniti punti x_1 pei quali si ha questa proprietà stessa
“ pel rapporto incrementale sinistro $\frac{f(x_1-h)-f(x_1)}{-h}$.

“ 3.° infiniti punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro
“ $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ quando h è ridotto sufficientemente piccolo è
“ sempre compreso fra $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ e L.

“ 4.° infiniti punti x_1 pei quali si ha questa proprietà stessa
“ pel rapporto incrementale sinistro.

“ E se la funzione:

$$\varphi(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\{f(\beta)-f(\alpha)\}$$

“ fra α e β non avrà infiniti massimi e minimi, allora fra α e β
“ esisteranno anche degli intervalli di ampiezza finita in ogni
“ punto x dei quali ambedue i rapporti incrementali destro e
“ sinistro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ coll'impiccolire di h fini-
“ ranno per rimanere sempre compresi fra l e $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, e esi-
“ steranno pure degli intervalli di ampiezza finita in ogni punto x
“ dei quali gli stessi rapporti incrementali finiranno per restare
“ sempre compresi fra $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ e L; e sì gli uni che gli altri
“ di questi intervalli saranno in numero finito e riempiranno l'in-
“ tervallo totale (α, β) succedendosi alternativamente „.

141. Premesse queste osservazioni generali sui rapporti incrementali, possiamo ora facilmente dimostrare la proprietà cui alludevamo in principio del paragrafo precedente.

Ricordiamo infatti che, se l e L sono i soliti numeri limiti corrispondenti all'intervallo (a, b) e se l è finito, esisterà fra a e b (§. 138) un punto x_l tale che in alcuni punti x' di ogni suo intorno per *infiniti* valori positivi di h_1 il rapporto incrementale destro $\frac{f(x'+h_1)-f(x')}{h_1}$ differirà da l meno di una quantità arbitrariamente piccola data ε_1, o in altri termini esisteranno fra a e b infiniti sistemi di punti α e β, che comprenderanno o nò il punto x_l ma uno almeno dei quali sarà vicino quanto si vuole a x_l, tali che il rapporto $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ abbia un valore $l+\varepsilon$ (ε posit. e $<\varepsilon_1$) che differisce da l tanto poco quanto si vuole; e similmente se L è finito esisteranno infiniti sistemi di punti α e β tali che il rapporto stesso $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ abbia un valore $L-\varepsilon$ (ε posit.) che differisce da L soltanto della quantità arbitrariamente piccola data ε; e se l o L sono infiniti esisteranno pure infiniti sistemi di punti α e β pei quali il rapporto stesso è maggiore in valore assoluto di quella quantità che più ci piace c ed è del segno di l o di L respettivamente.

Si dedurrà da ciò che le porzioni (α, β) dell'intervallo (a, b) considerate nel paragrafo precedente possono sempre intendersi prese in modo che quando l e L sono finiti si abbia $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=l+\varepsilon$, o $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=L-\varepsilon$; e se una o tutte e due le quantità l e L sono infinite, la porzione (α, β) potrà intendersi presa in modo che $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ abbia il segno di l o di L e sia maggiore in valore assoluto di un numero dato positivo e arbitrariamente grande c. Oltre a ciò poi, se considerando insieme alla funzione data $f(x)$ le infinite funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ che si ottengono da $f(x)$ col togliervi (o aggiungervi) le funzioni di primo grado $\mu x+\nu$, e riguardando come distinte soltanto quelle fra queste funzioni

che differiscono pel valore di μ, si troverà che fra le funzioni medesime $f(x)$ e $\varphi(x)$ non ne esiste alcuna o *tutt'al più* ne esiste soltanto un numero *finito* che abbiano fra a e b infiniti massimi e minimi, allora evidentemente si potrà intendere che i punti α e β siano scelti in modo che oltre a soddisfare alle condizioni precedenti soddisfino anche all'altra condizione che la funzione:

$$f(x)-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\left\{f(\beta)-f(\alpha)\right\}$$

non abbia fra a e b un numero infinito di massimi e di minimi; quindi, applicando alle porzioni (α, β) così determinate i risultati del paragrafo precedente, coll'osservare anche che invece di partire dall'intervallo totale (a, b) si può partire da qualunque sua porzione (a', b'), salvo a prendere allora per l e L i valori corrispondenti a questa porzione, si concluderà ora senz'altro che:

Se nell'intervallo (a, b) la funzione $f(x)$ è finita e continua, e se l e L sono i numeri limiti inferiori e superiori dei suoi rapporti incrementali per una porzione qualsiasi (a', b') dell'intervallo stesso (a, b), in questa porzione (a', b'):

1.° *Se l è finito, esistono sempre infiniti punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$, e infiniti punti x_2 pei quali il rapporto incrementale sinistro $\frac{f(x_2-h)-f(x_2)}{-h}$, coll'avvicinarsi indefinitamente di h a zero per valori positivi, se non tende verso un limite determinato* (ciò che sarebbe il caso della esistenza della derivata a destra o a sinistra nei punti x_1 o nei punti x_2) *oscilla però soltanto fra i limiti l e $l+\varepsilon$ discosti fra loro e da l soltanto di una quantità ε minore di una quantità arbitrariamente piccola, data anticipatamente, ε_1.*

2.° *Se anche L è finito, esistono pure infiniti altri punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro, e infiniti punti x_2 pei quali il rapporto incrementale sinistro coll'avvicinarsi indefinitamente di h a zero, se non tende verso un limite determinato, oscilla però soltanto fra i limiti $L-\varepsilon$ e L discosti fra loro e da L di una quantità ε minore di una quantità qualunque arbitrariamente piccola, data anticipatamente, ε_1.*

3.° *Se l o L o tutti e due questi limiti sono infiniti, esistono infiniti punti* x_1 *pei quali il rapporto incrementale destro, e infiniti punti* x_2 *pei quali il rapporto incrementale sinistro, se non ha per limite* $\pm\infty$, *oscilla però soltanto fra numeri dello stesso segno di l o di L respettivamente, e maggiori in valore assoluto di una quantità arbitrariamente grande, data avanti, c; e in tutti e tre questi casi i punti* x_1 *potranno talvolta coincidere coi punti* x_2.

4.° *E infine se la funzione* $f(x)$ *fra* a' *e* b' *non avrà mai un numero infinito di massimi e minimi e non verrà mai ad acquistarli togliendovi (o aggiungendovi) qualsiasi funzione di primo grado* $\mu x+\nu$, *o anche se fra le infinite funzioni* $f(x)-\mu x-\nu$ *che così si ottengono (la* $f(x)$ *inclus.) ne esiste soltanto un numero finito (differenti fra loro pel valore di* μ*) che fra* a' *e* b' *abbiano un numero infinito di massimi e minimi, allora nella porzione* (a', b') *esisteranno anche degli intervalli di ampiezza finita in ogni punto dei quali le indicate particolarità si verificheranno ad un tempo tanto pel rapporto incrementale destro che per quello sinistro.*

142. Il teorema dimostrato presenta, a quanto mi pare, una particolare importanza, e ciò si fà anche più manifesto quando si distinguano le funzioni in funzioni di prima e di seconda specie come si disse al §. 134. Per le funzioni di prima specie infatti, il teorema precedente, mentre ci lascia in dubbio se possano esistere o nò funzioni finite e continue di prima specie che non hanno mai derivata determinata e finita a destra o a sinistra dei punti dell'intervallo (a, b) nel quale si considerano, ci assicura però che in qualsiasi porzione dello stesso intervallo devono sempre esistere infiniti punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro, e infiniti punti x_2 pei quali il rapporto incrementale sinistro col tendere di h a zero, se non ha un limite determinato e finito, oscilla però soltanto fra limiti finiti che sono ristretti più di una quantità data anticipatamente, piccola a piacere, e che *variando i punti* x_1 o x_2 possono quindi ristringersi ognor più e rendersi differenti l'uno dall' altro tanto poco quanto si vuole; talchè in certo modo, per le funzioni di prima specie, in infiniti punti di qualsiasi intervallo ci si avvicina sempre così al caso della esistenza di una derivata finita e determinata, almeno da una parte

degli stessi punti, senza però poter dire che si debbano sempre *necessariamente* trovare dei punti nei quali questa derivata, anche considerata soltanto a destra o a sinistra, esiste effettivamente.

E nel caso delle funzioni di seconda specie in un dato intervallo, il teorema dimostrato ci permette di dire che esistono sempre in questo intervallo infiniti punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro, e infiniti punti x_2 pei quali il rapporto incrementale sinistro, se non ha per limite l'infinito, finisce però per restare sempre dello stesso segno e superiore in valore assoluto a numeri arbitrariamente grandi dati anticipatamente, e che *variando i punti* x_1 o x_2 possono quindi supporsi presi grandi quanto si vuole; talchè anchè per queste funzioni ci si avvicina sempre in certo modo al caso in cui la derivata almeno da una parte degli stessi punti esiste essendo infinita, senza però poter dire che debbano sempre trovarsi *necessariamente* dei punti nei quali la derivata anche considerata soltanto da una parte è effettivamente infinita.

143. Fondandosi poi sull'ultima parte del teorema dimostrato, e a complemento di essa, si può anche aggiungere che: *Se* $f(x)$ *è una funzione che in tutto un intervallo* (a, b), *nel quale è finita e continua, non ha infiniti massimi e minimi e neppure li acquista togliendole (o aggiungendole) qualsiasi funzione di primo grado* $\mu x+\nu$, *o anche se fra le infinite funzioni* $f(x)-\mu x-\nu$ *che così si ottengono (la* $f(x)$ *inclus.) ne esistono soltanto alcune in numero finito (distinte fra loro pel valore di* μ*) che fra* a *e* b *abbiano un numero infinito di massimi e di minimi,* allora *in infiniti punti di ogni porzione comunque piccola dell'intervallo dato la sua derivata intesa nel senso ordinario dovrà necessariamente avere un valore determinato e finito;* senza però escludere con questo che in ogni intervallo possano anche esistere infiniti altri punti nei quali di una tal derivata non può affatto parlarsi.

In questa ipotesi infatti, per quanto si disse al §. 133, e come risulta subito anche dalle osservazioni del §. 140, in qualunque porzione dell'intervallo dato devono esisterne infinite altre (α, β) nelle quali uno almeno dei numeri l e L che loro corrisponde ha un valore finito; e se questo è p. es. l, entro (α, β) esisteranno

altre porzioni (α_1, β_1) in ogni punto delle quali i rapporti incrementali destro e sinistro saranno ambedue compresi fra l e $l+\varepsilon$, essendo ε un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo.

Similmente se l_1 $(l \leq l_1 \leq l+\varepsilon)$ è il valore di l corrispondente alla porzione (α_1, β_1), da questa porzione si potrà sempre estrarne un altra (α_2, β_2), i cui estremi non coincidano nè con α_1 nè con β_1, e in ogni punto della quale i rapporti incrementali destro e sinistro finiscano per restare sempre compresi fra l_1 e $l_1+\frac{1}{2}\varepsilon$; e così continuando, con un processo analogo a quello seguito al §. 63 e anche in altre occasioni, si vede chiaramente che si giungerà sempre almeno a un punto limite *interno* all' intervallo (α, β) nel quale i rapporti incrementali destro e sinistro avranno uno stesso limite determinato e finito l' che sarà la ordinaria derivata di $f(x)$ in quel punto; talchè il teorema enunciato sopra può dirsi completamente dimostrato.

144. Non si deve poi lasciare di notare che, siccome nel caso attuale (come già abbiamo detto) in ogni porzione dell' intervallo dato ne devono sempre esistere altre nelle quali uno almeno dei numeri corrispondenti l e L è finito, basterà ricordare quanto si trovò nel §. 140 per potere subito concludere con tutta facilità che: *Se una funzione finita e continua $f(x)$, in un dato intervallo (a, b) non ha mai infiniti massimi e minimi e neppure li acquista, togliendovi (o aggiungendovi) qualsiasi funzione di primo grado $\mu x+\nu$, o anche se fra le infinite funzioni $f(x)-\mu x-\nu$ che così si ottengono (la $f(x)$ incl.) ne esiste soltanto un numero finito (differenti fra loro pel valore di μ) che fra a e b abbiano un numero infinito di massimi e di minimi,* allora *in qualunque porzione (a', b') dell'intervallo dato ne esisteranno sempre altre di ampiezza finita nelle quali i rapporti incrementali destro e sinistro finiscono per restare sempre numericamente inferiori a un numero finito; e se nella stessa porzione (a', b') la funzione non è sempre costante, esisteranno in essa anche degli intervalli di ampiezza finita nei quali i rapporti incrementali oltre a restare sempre finiti si mantengono anche discosti da zero più di una quantità determinata e hanno tutti lo stesso segno, per modo che in queste porzioni la*

derivata ordinaria nei punti ove esiste, oltre essere finita, è anche differente da zero, e ha sempre un medesimo segno.

145. I teoremi dimostrati negli ultimi paragrafi mi sembra siano quelli da sostituirsi al teorema che fino a questi ultimi tempi si poneva come fondamento del calcolo differenziale in tutti i migliori trattati, quello cioè della esistenza almeno in generale della derivata di ogni funzione finita e continua. Essi poi per la loro generalità potranno forse condurre a quelle idee e a quei principî su cui potrà fondarsi un calcolo più generale di quello differenziale che si applichi anche ai casi in cui la derivata della funzione finita e continua che si considera non esiste.

Del resto i risultati precedenti possono anche rendersi assai più completi nel modo seguente.

Ritorniamo perciò alle funzioni l_x e L_x limiti inferiori e superiori respettivamente dei valori del rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ corrispondenti ai varii valori che può avere h da 0 a $b-x$ (0 escl.) pel valore speciale x della variabile; e torniamo pure a considerare le funzioni analoghe l'_x e L'_x pel rapporto incrementale sinistro.

Come abbiamo già osservato nel §. 136 le funzioni l_x e L_x per *ogni valore speciale* che si attribuisca ad x fra a e b (b escl.) possono anche considerarsi come funzioni di b per tutti i valori di b compresi fra il valore che si considera per x (x escl.), e il valore che fu dato originariamente per b come estremo dell'intervallo. Così essendo, è chiaro che se s' impiccolisce continuamente b facendolo avvicinare indefinitamente ad x, la quantità l_x crescerà o rimarrà invariata, mentre la quantità L_x decrescerà o rimarrà invariata, e quindi l_x e L_x tenderanno (§. 25) verso due limiti determinati (finiti o infiniti) λ_x e Λ_x, che potranno considerarsi come limiti superiori e limiti inferiori respettivamente delle quantità l_x e L_x pei varii valori di b fra x e b; e evidentemente questi numeri λ_x e Λ_x, indipendenti così dalla ampiezza dell' intervallo (a, b) e dipendenti solo dalla natura della funzione $f(x)$ negli intorni di x a destra, godranno della proprietà che, indicando con ε un numero positivo piccolo a piacere, il rapporto incrementale

destro di $f(x)$ col tendere di h a zero finirà per mantenersi sempre compreso fra $\lambda_x-\varepsilon$ e $\Lambda_x+\varepsilon$ se λ_x e Λ_x sono finiti, o oscillerà fra numeri arbitrariamente grandi positivi e negativi se $\lambda_x=-\infty$ e $\Lambda_x=+\infty$, ec.

Se dunque λ_x e Λ_x saranno eguali e finiti, la derivata di $f(x)$ a destra di x esisterà e sarà eguale a Λ_x o λ_x; e se λ_x e Λ_x saranno ambedue uguali a $+\infty$, o ambedue uguali a $-\infty$, questa derivata sarà uguale a $+\infty$ o a $-\infty$ respettivamente; mentre se λ_x e Λ_x saranno differenti fra loro, la derivata di $f(x)$ a destra del punto x non esisterà, e il rapporto incrementale destro col tendere di h a zero non tenderà verso alcun limite determinato, e, mantenendosi pur sempre continuo rispetto ad h, quando λ_x e Λ_x sono ambedue finiti oscillerà fra $\lambda_x-\varepsilon$ e $\Lambda_x+\varepsilon$, ove ε è una quantità positiva che impiccolendo h può ridursi piccola a piacere; e quando λ_x è finito e $\Lambda_x=\infty$, oscillerà fra $\lambda_x-\varepsilon$ e ∞, ec....; e per quanto piccolo sia h, finirà che se λ_x e Λ_x sono finiti il rapporto incrementale destro prenderà sempre *anche* dei valori vicini quanto si vuole a λ_x e dei valori vicini quanto si vuole a Λ_x e compresi propriamente fra $\lambda_x-\varepsilon_1$ e $\lambda_x+\varepsilon_1$, e fra $\Lambda_x-\varepsilon_2$ e $\Lambda_x+\varepsilon_2$ respettivamente, essendo ε_1 e ε_2 numeri positivi arbitrariamente piccoli; mentre se p. es. Λ_x è infinito, lo stesso rapporto incrementale finirà per prendere anche valori dello stesso segno di Λ_x e numericamente grandi quanto si vuole, ec....

Per ogni punto x poi (b escl.) questi numeri determinati λ_x e Λ_x dovranno considerarsi insieme quando la derivata a destra di x non esiste (nè finita nè infinita), mentre si ridurranno a uno solo finito o infinito quando questa derivata a destra esiste ed è finita o infinita.

Considerati poi per tutti i valori di x in tutto l'intervallo (a, b) (b escl.), i numeri λ_x e Λ_x costituiranno due funzioni determinate di x, continue o nò, finite o infinite, in tutto l'intervallo (b però escl.), e ammetteranno respettivamente un limite inferiore λ e un limite superiore Λ finiti però o infiniti essi pure.

Pel rapporto incrementale sinistro, si avranno due funzioni analoghe λ'_x e Λ'_x in tutto l'intervallo (a, b) (a escl.), e queste pure avranno respettivamente un limite inferiore λ' e un limite

superiore Λ' finiti o infiniti; talchè si hanno così da considerare quattro funzioni ad un tempo λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x le quali si ridurranno ad una nel caso soltanto in cui la derivata intesa nel senso ordinario esiste in tutti i punti dell'intervallo ed è finita o infinita e determinata di segno, si ridurranno a due nei casi nei quali si ha una derivata a destra e se ne ha pur una ma differente a sinistra, si ridurranno ancora a due o a tre quando esiste soltanto la derivata a destra o soltanto quella a sinistra, ec....

L'intervallo $\Lambda_x-\lambda_x$ da λ_x a Λ_x che viene così ad essere il campo nel quale finiscono per oscillare continuamente i valori del rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h tende a zero per valori positivi, sarà detto d'ora innanzi *oscillazione* di quel rapporto nel punto x, o meglio *oscillazione derivatoria destra della funzione* $f(x)$ pel valore x della variabile. Similmente la differenza $\Lambda'_x-\lambda'_x$ sarà detta oscillazione del rapporto incrementale sinistro o *oscillazione derivatoria sinistra di* $f(x)$. Per brevità di linguaggio poi le funzioni λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x saranno talvolta chiamate gli *estremi oscillatorii inferiori o superiori* respettivamente del rapporto incrementale destro o sinistro.

146. Osserveremo ora che i numeri λ e λ' limiti inferiori dei valori di λ_x e λ'_x nei punti dell'intervallo (a, b), e i numeri Λ e Λ' limiti superiori dei valori di Λ_x e Λ'_x nei punti dello stesso intervallo, sono uguali fra loro respettivamente e ai numeri limiti l e L considerati nei paragrafi precedenti.

Si osservi infatti che se l fosse differente da λ, o L differente da Λ, per le definizioni di questi numeri potremmo soltanto avere $l<\lambda$, o $L>\lambda$.

Ma, supponendo p. es. che l e λ siano finiti, e ammettendo che fosse $l<\lambda$, se s'indica con μ un numero compreso fra l e λ, e con ε un numero positivo inferiore a $\lambda-\mu$, si vede subito che il rapporto incrementale destro $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ corrispondente a un valore qualunque x della variabile fra a e b, coll'impiccolire di h per valori positivi finirebbe per mantenersi sempre superiore a $\lambda_x-\varepsilon$ e quindi anche a $\lambda-\varepsilon$; e perciò la funzione $\varphi(x)=f(x)-\mu x$

per *ogni* valore di x fra a e b, coll'impiccolire di h per valori positivi, finirebbe per soddisfare sempre alla diseguaglianza $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}>0$, cioè $\varphi(x)$ sarebbe sempre crescente.

D'altra parte, per la definizione di l vi dovrebbero essere alcuni punti x fra a e b (b escl.), e alcuni valori positivi di h pei quali $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ fosse vicinissimo ad l e quindi anche inferiore a μ, e allora sarebbe $\varphi(x+h)<\varphi(x)$, ciò che è contradditorio; quindi, poichè ragionamenti simili possono farsi nel caso in cui l o λ o tutti e due siano infiniti (ammettendo anche cioè che potesse essere $l=-\infty$, $\lambda=\infty$), e nel caso anche in cui $L>\Lambda$, si conclude che dovrà essere $\lambda=\lambda'=l$, e similmente $\Lambda=\Lambda'=L$.

I limiti inferiori sono dunque gli stessi per le funzioni λ_x, λ'_x, l_x, e l'_x, e così i limiti superiori sono gli stessi per le funzioni Λ_x, Λ'_x, L_x, e L'_x. Noi li indicheremo d'ora innanzi con λ e Λ respettivamente; e così, per quanto ora abbiamo dimostrato, *questi numeri limiti λ e Λ degli estremi oscillatorii corrispondenti all'intervallo (a, b), oltre a comprendere i valori di tutti questi estremi oscillatorii stessi, comprenderanno anche i valori di tutti i rapporti incrementali* $\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}$, *qualunque siano i due punti x e $x\pm h$ fra a e b (a e b incl.)*. E si può notare che restano ora conseguenze immediate di questa proprietà la seconda parte del teorema del §. 71 e i teoremi dei §§. 79 e 135; come può notarsi anche che *quando i numeri λ e Λ relativi a un dato intervallo siano uguali fra loro,* allora siccome i numeri λ e Λ corrispondenti alla funzione $f(x)-\lambda x$ saranno zero, *la funzione data $f(x)$ non sarà altro che la funzione di primo grado $\lambda x+\nu$, ove ν è una costante,* ec....

147. Oltre a ciò poi è facile vedere che le funzioni λ_x e λ'_x hanno anche uno stesso limite superiore che è quello delle funzioni Λ_x e Λ'_x cioè Λ, e le funzioni Λ_x e Λ'_x hanno uno stesso limite inferiore che è quello delle funzioni λ_x e λ'_x cioè λ.

Supponendo infatti dapprima che il limite inferiore λ di λ_x e λ'_x sia finito, e ricordando quanto si dimostrò nel §. 141, si

vede subito che esistono infiniti punti x_1 pei quali il rapporto incrementale destro $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ quando h è ridotto sufficientemente piccolo, varia soltanto fra λ e $\lambda+\varepsilon$, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Da ciò si deduce che l'estremo oscillatorio Λ_{x_1} corrispondente ai punti x_1 sarà compreso anch'esso fra λ e $\lambda+\varepsilon$; quindi, poichè evidentemente Λ_x non può mai essere inferiore a λ, si conclude subito di quì che il limite inferiore di Λ_x sarà precisamente λ.

In modo simile si vedrebbe che se $\lambda=-\infty$, il limite inferiore di Λ_x è precisamente $-\infty$ cioè λ, come anche si troverebbe che il limite superiore di λ_x è precisamente Λ; dunque, si può appunto concludere che *gli estremi oscillatorii inferiori e superiori destro e sinistro* λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x *hanno tutti e quattro uno stesso limite inferiore, e uno stesso limite superiore in qualsiasi porzione dell'intervallo nella quale si considerino;* e quindi, come ora è ben naturale, e come risulta del resto anche dalla dimostrazione precedente, gli estremi λ_x e Λ_x si avvicinano contemporaneamente in infiniti punti ai loro limiti superiori o ai loro limiti inferiori quando questi limiti sono finiti, o crescono insieme indefinitamente quando questi limiti sono infiniti; e lo stesso accade per gli estremi λ'_x e Λ'_x.

148. Queste proprietà notevolissime pongono in evidenza le grandi singolarità delle funzioni che rappresentano gli estremi oscillatorii superiori e inferiori quando questi estremi non costituiscono una funzione unica, cioè quando non esiste la ordinaria derivata.

1.° Apparisce infatti di quì in primo luogo che: *se le funzioni* λ_x *e* Λ_x *sono sempre finite e non sono sempre uguali fra loro, esse, pure potendo differire l'una dall'altra in ogni punto, sono tali però che in infiniti punti di ogni porzione comunque piccola dell'intervallo in cui si considerano sono vicine l'una all'altra quanto si vuole,* mentre in infiniti altri punti della stessa porzione possono differire l'una dall'altra di quantità sensibilissime che possono anche raggiungere ma non superare la quantità $\Lambda-\lambda$; e *lo*

stesso accade delle funzioni λ'_x *e* Λ'_x. Questo poi equivale a dire che la funzione $\Lambda_x - \lambda_x$ che rappresenta le oscillazioni derivatorie destre, e così l'altra $\Lambda'_x - \lambda'_x$ che rappresenta le oscillazioni derivatorie sinistre, sono tali che per ciascuna di esse in vicinanza di qualsiasi punto degli intervalli nei quali gli estremi oscillatorii del rapporto incrementale sono finiti esistono infiniti punti nei quali esse sono prossime a zero quanto si vuole; per modo che se p. es. la funzione $\Lambda_x - \lambda_x$ costituita dalle oscillazioni derivatorie destre è continua in un punto x', essa in quel punto x' dovrà essere zero (§. 45), e perciò nello stesso punto la funzione data $f(x)$ avrà la derivata a destra finita e determinata.

E così in particolare se in ogni punto di un intervallo (a, b) (b escl. se $b > a$) gli estremi oscillatorii di una funzione sono finiti, e la oscillazione derivatoria destra costituisce una funzione finita e continua in ogni punto, essa sarà sempre zero, e la funzione data ammetterà sempre la derivata a destra finita e determinata.

2.° Estendiamo ora, per brevità di linguaggio, i concetti di continuità e di discontinuità di prima o di seconda specie che si hanno pel caso delle funzioni sempre finite; dicendo cioè che una funzione *che in un punto* x_0 *ha un valore infinito, p. es.* $+\infty$, *è continua p. es. a destra di* x_0 *quando il limite dei valori che essa ha a destra di* x_0 *è* $+\infty$, *ed è continua in* x_0 in modo assoluto *quando il limite dei valori che essa ha a destra e a sinistra di* x_0 *è* $+\infty$, *ec.* . . ; allora valendosi del teorema del paragrafo precedente si potrà anche dimostrare che: *se uno degli estremi oscillatorii, p. es.* λ_x, *in un punto* x_0 *interno all'intervallo che si considera è continuo (essendo però finito o infinito), gli altri estremi* $\Lambda_x, \lambda'_x, \Lambda'_x$ *nel punto* x_0 *saranno anch'essi continui e uguali a* λ_{x_0}, *e la funzione data* $f(x)$ *nello stesso punto* x_0 *ammetterà una derivata ordinaria determinata (finita però, o infinita e determinata di segno)* (*).

(*) A scanso di equivoci, avvertiamo esplicitamente che, quando si dirà che una funzione in un punto x_0 ha la derivata (ordinaria) determinata o, più semplicemente, ammette la derivata (ordinaria), senz'altra limitazione, s'intenderà sempre d'includere tanto il caso in cui questa derivata è finita, quanto quello in cui essa è infinita e determinata di segno (per modo cioè che sì la derivata a destra che quella

Preso infatti un intorno piccolissimo $(x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_1)$ del punto x_0, in questo intorno i limiti superiori e inferiori della funzione λ_x, e quindi anche delle altre Λ_x, λ'_x, Λ'_x, quando λ_{x_0} è finito differiranno da λ_{x_0} di una quantità che coll'impiccolire di ε_0 e ε_1 potrà rendersi piccola quanto si vuole, e quando λ_{x_0} è infinito saranno numericamente maggiori di quella quantità che più ci piace c e avranno il segno di λ_{x_0}; quindi le stesse particolarità si avranno anche per le quantità λ'_{x_0}, Λ_{x_0}, e Λ'_{x_0}, e perciò le quantità λ_x, Λ_x, λ'_x e Λ'_x, nel punto x_0 avranno tutte per valore λ_{x_0} e saranno continue, come appunto abbiamo enunciato.

3.° In particolare dunque: *se una funzione è tale che uno dei suoi estremi oscillatorii sia sempre continuo in tutti i punti* interni *a un intervallo* (a, b), *essa in questi punti avrà sempre la sua derivata ordinaria determinata e continua, e uguale a questo estremo oscillatorio stesso; e se nell'intorno di un punto* interno *all'intervallo dato una funzione* $f(x)$ *ammette sempre la derivata a destra, e in quel punto questa derivata è continua, la derivata a sinistra nello stesso punto esisterà pure e sarà uguale a quella a destra, e quindi esisterà la derivata ordinaria (finita però, o infinita e determinata di segno)*; talchè, più particolarmente ancora si può dire che: *se la funzione stessa* $f(x)$ *ammetterà la derivata a destra in tutti i punti* interni *a un dato intervallo, e questa derivata sarà sempre finita e continua, in ciascuno di quei punti la derivata a sinistra esisterà pure e sarà uguale a quella a destra, e quindi esisterà sempre la derivata ordinaria e sarà una funzione finita e continua in qualunque porzione dell'intervallo che non termini ai punti estremi a o b.*

Nei punti estremi poi potranno aversi delle singolarità. Però se, trattandosi p. es. dell'estremo b, con $a<b$, le derivate prese a destra dei punti che trovansi a sinistra di b, coll'avvicinarsi indefinitamente di questi punti al punto b, hanno un limite finito o infinito, allora si vede subito (e ciò del resto risulterà come caso

a sinistra siano ambedue $+\infty$, o siano ambedue $-\infty$) —. E si noterà che per questa semplicizzazione di linguaggio, i teoremi dei §§. 71 e seg., nei quali si trova la condizione che la derivata della funzione sia determinata e finita, o infinita e determinata di segno, vengono tutti relativi al caso in cui questa derivata è determinata.

particolare anche da quanto diremo nel paragrafo seguente) che questo limite sarà precisamente la derivata presa nel punto b a sinistra. E così in particolare, se questo limite è finito, e se la derivata presa a destra dei punti interni dell'intervallo (a, b) è sempre finita e continua, e si sà che tale è pure quella a destra di a, o almeno si sà che avvicinandosi ad a indefinitamente esiste un limite determinato e finito pei valori delle derivate a destra, allora evidentemente si potrà anche aggiungere che la derivata (ordinaria) di $f(x)$ esiste sempre in tutto l'intervallo (a, b) e costituisce una funzione finita e continua nell'intervallo stesso.

4.° Di quì poi apparisce pur chiaramente che: *se in ogni punto di un dato intervallo la derivata di una funzione presa sempre da una stessa parte esiste ed è finita ma discontinua, o è infinita in alcuni punti, la derivata presa dall'altra parte, o non esisterà o presenterà singolarità dello stesso genere, potendo però avvenire che quest'ultima derivata invece di essere infinita abbia soltanto per limite superiore (o inferiore) dei suoi valori l'infinito;* e in particolare anche: *se la derivata a destra è sempre determinata e finita, e è totalmente discontinua, quella a sinistra o non esisterà, o se esiste sarà anch'essa totalmente discontinua; mentre invece se la derivata a destra sarà sempre determinata e finita e costituirà una funzione punteggiata discontinua, in infiniti punti di qualunque porzione comunque piccola dell'intervallo dato, dovrà esistere anche la derivata a sinistra e essere uguale a quella a destra, per modo che negli stessi punti esisterà anche la derivata ordinaria;* talchè si può anche asserire che: *se esiste una funzione finita e continua la cui derivata a destra in tutti i punti di un dato intervallo sia sempre determinata e finita, mentre quella a sinistra non esiste in nessun punto, o almeno dove esiste è sempre differente da quella a destra, questa derivata a destra dovrà essere una funzione totalmente discontinua in qualunque porzione dell'intervallo dato.*

5.° In ogni caso poi, osservando che in qualunque intervallo gli estremi oscillatorii destro e sinistro di una funzione hanno tutti lo stesso limite inferiore e lo stesso limite superiore, evidentemente oltre a poter dire in generale che: *quando i varii estremi oscillatorii sono finiti, le loro oscillazioni in qualunque porzione*

(a', b') dell'intervallo dato (a' o b' escl.) sono sempre uguali fra loro, si può asserire in particolare che: *quando le derivate di una funzione prese a destra e a sinistra nei punti di un dato intervallo sono entrambe determinate e finite, le oscillazioni delle derivate prese a destra dei punti di una porzione qualsiasi (a', b') dello stesso intervallo (b' escl. se $a'<b'$) sono uguali alle oscillazioni delle derivate prese a sinistra degli stessi punti (a' ora escl.)*; e per il teorema del §. 141 si può dire anche che: *in questo caso in infiniti punti della stessa porzione (a', b') i valori della derivata a destra differiscono tanto poco quanto si vuole dai valori che prende la derivata a sinistra negli stessi punti o in altri punti della porzione medesima.*

149. Oltre ai risultati precedenti, se ne hanno altri non meno notevoli che servono loro di complemento o di generalizzazione.

Si consideri uno degli estremi oscillatorii destri, p. es. l'inferiore λ_x, e si supponga che, se x_0 è un punto differente da b preso nel solito intervallo (a, b), la funzione λ_x coll'avvicinarsi indefinitamente di x a x_0 a destra abbia un limite determinato (finito, o infinito e determinato di segno) che potremo indicare con λ_{x_0+0}.

Allora, nei punti di ogni intorno sufficientemente piccolo $(x_0, x_0+\varepsilon)$ a destra di x_0 (x_0 per ora escl.), i valori di λ_x, quando λ_{x_0+0} è finito, saranno tutti compresi fra $\lambda_{x_0+0}-\sigma$ e $\lambda_{x_0+0}+\sigma$, essendo σ un numero positivo dato arbitrariamente piccolo, e quando λ_{x_0+0} è infinito, avranno tutti il segno di λ_{x_0+0} e saranno numericamente maggiori di un numero positivo dato e arbitrariamente grande c; e in forza del teorema del §. 147, se ε_1 è un numero positivo qualunque inferiore a ε, in ogni intervallo $(x_0+\varepsilon_1, x_0+\varepsilon)$ si avranno le stesse particolarità anche per gli altri estremi oscillatorii $\Lambda_x, \lambda'_x, \Lambda'_x$; talchè in particolare i valori di λ'_x e Λ'_x per tutti i punti dell'intorno $(x_0, x_0+\varepsilon)$ (x_0 escl.), e così pure i loro limiti inferiori e superiori λ' e Λ' saranno compresi fra $\lambda_{x_0+0}-\sigma$ e $\lambda_{x_0+0}+\sigma$, o saranno dello stesso segno di λ_{x_0+0} e numericamente maggiori di c.

Ma questi limiti λ' e Λ' sono gli stessi (§. 147) anche pei valori delle funzioni λ_x e Λ_x nei punti dello stesso intorno $(x_0, x_0+\varepsilon)$ (x_0 ora incl.); quindi anche λ_{x_0} e Λ_{x_0} dovranno godere

essi pure delle particolarità suindicate, e si avrà perciò evidentemente $\lambda_{x_0+0} = \lambda_{x_0} = \Lambda_{x_0} = \lim \lambda_x = \lim \Lambda_x = \lim \lambda'_x = \lim \Lambda'_x$, ove i limiti si intendono presi per $x=x_0+0$.

Risultati simili si ottengono partendo dalla ipotesi che λ'_x o Λ'_x per $x=x_0+0$ abbiano un limite determinato, e anche partendo da uno degli estremi oscillatorii sinistri e considerandolo negli intorni $(x_0-\varepsilon, x_0)$ a sinistra di x_0 (col supporre però allora x_0 differente da a); quindi si può ora evidentemente concludere che: *per ogni funzione $f(x)$ finita e continua in un intervallo (a, b)*:

1.° *Gli estremi oscillatorii destri non possono avere mai discontinuità ordinarie a destra dei punti dello stesso intervallo (b escl.), e gli estremi oscillatorii sinistri non possono avere discontinuità ordinarie a sinistra degli stessi punti (a ora escl.), per modo cioè che a destra respettivamente o a sinistra dei punti dell'intervallo (a, b) gli estremi oscillatorii destri o sinistri sono continui o hanno discontinuità soltanto di seconda specie.*

2.° *Quando in un punto x_0 dell'intervallo (a, b) (b escl.) uno degli estremi oscillatorii destri, p. es. λ_x, è continuo a destra, lo stesso accadrà anche dell'altro estremo oscillatorio destro Λ_x, e in x_0 questi due estremi oscillatorii saranno uguali fra loro, per modo che nello stesso punto x_0 esisterà la derivata a destra (finita però o infinita).*

3.° *Nelle stesse ipotesi, anche gli estremi oscillatori sinistri λ'_x e Λ'_x nel punto x_0 a destra saranno continui o avranno soltanto una discontinuità ordinaria, e il loro valore nel punto x_0, o il limite dei loro valori a destra di x_0, sarà uguale alla derivata a destra di x_0.*

4.° *Se uno degli estremi oscillatorii sinistri λ'_x o Λ'_x nel punto x_0 a destra è continuo o ha soltanto una discontinuità ordinaria, anche l'altro estremo oscillatorio sinistro presenterà l'una o l'altra delle stesse particolarità; e inoltre gli estremi oscillatorii destri λ_x e Λ_x saranno continui nel punto x_0 a destra, e la funzione data avrà una derivata a destra determinata e uguale al valore comune delle quantità λ_{x_0}, Λ_{x_0}, λ'_{x_0+0} e Λ'_{x_0+0}*; per modo quindi che *la derivata presa in un punto x_0 a destra non potrà mancare altro*

che quando in quel punto x_0 *uno degli estremi oscillatorii presenti una discontinuità di seconda specie a destra; e se ciò accadrà per uno di questi estremi oscillatorii accadrà pure per gli altri.* E si può evidentemente aggiungere che: *quando un estremo oscillatorio, o le derivate prese a destra o a sinistra vengano ad avere una discontinuità di seconda specie in un punto* x_0 *a destra, in questo punto* x_0 *i valori degli estremi oscillatorii destri o della derivata a destra saranno compresi fra i due numeri entro cui finiscono per avvenire le oscillazioni di tutti gli estremi oscillatorii o delle derivate prese a destra e a sinistra quando ci si avvicina indefinitamente a* x_0 *dalla sua parte destra.*

In particolare poi si può ora asserire che: *se nei punti* x *di un dato intervallo* (a, b) *una funzione finita e continua* $f(x)$ *ammette una derivata a destra* d_x *(finita o infinita), questa derivata* d_x, *a destra degli stessi punti dovrà essere continua o avere discontinuità soltanto di seconda specie; e se negli stessi punti essa ammette sempre anche una derivata a sinistra* d'_x, *allora in quei punti* x *a destra dei quali questa derivata* d'_x *è continua, o ha soltanto una discontinuità ordinaria, la derivata presa a destra* d_x *sarà continua dalla parte destra e avrà per valore* d'_{x+0}; e viceversa: *se il punto* x *è interno all'intervallo* (a, b), *e* d_x *è continua in* x *a destra, anche* d'_x *nel punto* x *a destra sarà continua o avrà una discontinuità ordinaria;* talchè, riunendo questi risultati ai precedenti, si può anche affermare che: *se per una funzione finita e continua la derivata presa sempre da una parte dei punti di un dato intervallo* (a, b), *p. es. la derivata a destra, è sempre determinata, e almeno a sinistra dei punti corrispondenti non ha mai discontinuità di seconda specie; anche la derivata a sinistra esisterà pure e sarà sempre continua a sinistra* (a *e* b *ora esclusi*).

150. Aggiungiamo ora che: *se in un intervallo* (a, b) *una funzione finita e continua* $f(x)$ *ha sempre una derivata a destra determinata e finita, e questa derivata* d_x *è zero in alcuni punti di qualsiasi porzione anche ristrettissima dello stesso intervallo, e è sempre continua a destra di ogni punto, la funzione data si riduce a una costante.* In questo caso infatti, siccome la funzione d_x in ogni punto x_0 è continua a destra, mentre poi in punti a destra

di x_0 e prossimi quanto si vuole a x_0 prende il valore zero, sarà sempre $d_x=0$, e quindi si avrà $f(x)=\text{cost.}$ (§. 79 o §. 146).

Di quì poi si deduce anche che: *se due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, finite e continue in un intervallo (a, b), in tutti i punti di questo intervallo (b escl.) hanno sempre le derivate a destra determinate e finite, e queste derivate sono uguali in alcuni punti di qualsiasi porzione anche ristrettissima dell'intervallo dato, e sono sempre continue a destra di ogni punto, le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ non potranno differire fra loro altro che per una quantità costante,* giacchè la loro differenza $\varphi(x)-\psi(x)$ sarà nel caso appunto della funzione $f(x)$ del teorema precedente.

Si può poi osservare che, per quanto si è detto nel paragrafo precedente, alla condizione posta negli ultimi teoremi, che le derivate a destra delle funzioni $f(x)$, o $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, siano continue a destra di ogni punto, si può sostituire l'altra che le derivate stesse non abbiano mai discontinuità di seconda specie a destra dei punti corrispondenti.

151. Per giungere ora ad un altro teorema analogo nel quale figurano le derivate a destra e a sinistra, dimostriamo prima che: *quando una funzione finita $f(x)$ è infinite volte discontinua in un intervallo (a, b); e ha soltanto discontinuità ordinarie, o almeno è tale che in ogni porzione dell'intervallo (a, b) esistono sempre dei punti nei quali almeno da una parte è continua o ha soltanto discontinuità ordinarie, essa sarà sempre una funzione punteggiata discontinua nell'intervallo dato (a, b).*

In questa ipotesi infatti, in ogni porzione dell'intervallo (a, b) si potrà sempre trovare un punto interno x_1 tale che i valori di $f(x)$ col tendere di x a x_1 a destra o col tendere di x a x_1 a sinistra avranno un limite determinato e finito, e quindi, per tutti i punti ξ, η di un intorno sufficientemente piccolo $(x_1, x_1+\varepsilon)$ del punto x_1 a destra, o pei punti ξ, η di un intorno pure sufficientemente piccolo $(x_1-\varepsilon_1, x_1)$ di x_1 a sinistra (gli estremi al più escl.), si avrà in valore assoluto $f(\xi)-f(\eta)<\sigma$, essendo σ un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Segue da ciò che in ogni porzione di uno almeno dei due intorni a destra o a sinistra di x_1 i salti della funzione non

potranno mai raggiungere o superare il numero σ; quindi in ogni porzione dell'intervallo (a, b) esisteranno sempre altre porzioni nelle quali la funzione farà soltanto salti inferiori a un numero positivo dato comunque piccolo σ, e la funzione stessa (§. 64) sarà una funzione punteggiata discontinua nell'intervallo (α, β), come appunto volevamo dimostrare.

152. Valendosi ora della proprietà dimostrata e di quelle dei paragrafi precedenti, si trova con tutta facilità il teorema cui alludevamo in principio del paragrafo precedente, vale a dire che: *se* $\varphi(x)$ *è una funzione finita e continua in un intervallo* (a, b), *e nei punti di questo intervallo* (b *escl.*) *ha sempre una derivata a destra* d_x *che, oltre esser determinata e finita, è continua in ogni punto a destra; e* $\psi(x)$ *è un altra funzione finita essa pure e continua che in tutti i punti dell'intervallo* (a, b) (a *escl.*) *ha sempre una derivata a sinistra determinata e finita* δ'_x *che non ha mai discontinuità di seconda specie a destra dei singoli punti,* allora *quando avvenga che in qualunque porzione dell'intervallo dato queste derivate* d_x, *e* δ'_x *in alcuni dei punti nei quali* δ'_x *è continua siano anche uguali fra loro, le due funzioni* $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ *non potranno differire l'una dall'altra altro che per una quantità costante.*

Si osservi infatti che per quanto si è detto nel §. 148 o anche nel §. 149, δ'_x nei punti nei quali è continua rappresenterà ad un tempo tanto la derivata a sinistra che quella a destra della funzione $\psi(x)$, talchè in questi punti δ'_x potrà sempre considerarsi anche come la derivata a destra di $\psi(x)$. D'altra parte, pel teorema del paragrafo precedente, in ogni porzione comunque piccola dell'intervallo (a, b) esistono effettivamente infiniti punti nei quali δ'_x è continua; dunque poichè in alcuni di questi punti $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ hanno sempre le stesse derivate a destra, e, per quanto si è detto in fine del §. 149, anche per la funzione $\psi(x)$ le derivate prese a destra sono continue in ogni punto a destra, pel teorema secondo del §. 150 si può concludere subito che $\psi(x)-\varphi(x)=\text{cost.}$, e il teorema resta così dimostrato.

Si può quì pure osservare che, per quanto fu detto al §. 149, anche in questo teorema, invece di porre la condizione che a destra

dei singoli punti la funzione d_x sia sempre continua, si potrebbe porre l'altra che essa non abbia discontinuità di seconda specie; come si può pur notare che, seguendo i processi tenuti nel §. 72, 4.° e anche in altre occasioni, i teoremi degli ultimi tre paragrafi possono venire estesi anche al caso in cui nell'intervallo dato vi è un gruppo (finito o infinito) di punti di prima specie pei quali è incerto se siano o nò soddisfatte le condizioni che si richiedono per gli altri punti, ec.

153. Si deve inoltre osservare che il teorema del §. 151, permette anche di dire che: *se una funzione $f(x)$ è finita ed è totalmente discontinua in un intervallo (a, b), dovrà sempre esistere una porzione di questo intervallo in ogni punto della quale la funzione ha una discontinuità di seconda specie sì a destra che a sinistra;* talchè avendo riguardo al teorema 2.° del §. 148 si può anche aggiungere che: *se gli estremi oscillatorii di una funzione finita e continua $f(x)$ per un dato intervallo (a, b) sono sempre finiti, la derivata ordinaria di questa funzione non può mancare in ogni punto altro che nel caso in cui in ogni porzione dell'intervallo dato ne esistano sempre altre in ciascun punto delle quali gli estremi oscillatorii abbiano discontinuità di seconda specie sì a destra che a sinistra.*

154. Merita ora di essere notato che nei punti nei quali λ_x e Λ_x sono finiti, per h positivo e sufficientemente piccolo si può sempre scrivere:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\lambda_x+\Lambda_x}{2}+\theta_{x,h}\frac{\Lambda_x-\lambda_x}{2}+\varepsilon_{x,h},$$

essendo $\varepsilon_{x,h}$ una quantità che è nulla o che in valore assoluto coll'impiccolire di h può rendersi sempre minore di qualsiasi quantità data, e $\theta_{x,h}$ essendo una quantità che varia fra -1 e 1 (questi limiti inclusi).

Similmente se in un punto x le funzioni λ_x e Λ'_x sono finite, per h positivo si avrà:

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=\frac{\lambda'_x+\Lambda'_x}{2}+\theta'_{x,h}\frac{\Lambda'_x-\lambda'_x}{2}+\varepsilon'_{x,h},$$

essendo $\theta'_{x,h}$ e $\varepsilon'_{x,h}$ quantità che hanno lo stesso significato delle

$\theta_{x,h}$ e $\varepsilon_{x,h}$ della formola precedente; e così quando λ_x e Λ_x, o λ'_x e Λ'_x sono finiti e non si ha $\lambda_x = \Lambda_x$, o $\lambda'_x = \Lambda'_x$ (cioè quando non esiste la derivata a destra o quella a sinistra) le formole precedenti danno una scomposizione molto semplice dei rapporti incrementali destro e sinistro in una parte fissa $\frac{\lambda_x + \Lambda_x}{2}$ o $\frac{\lambda'_x + \Lambda'_x}{2}$, e in una parte $\theta_{x,h} \frac{\Lambda_x - \lambda_x}{2} + \varepsilon_{x,h}$, o $\theta'_{x,h} \frac{\Lambda'_x - \lambda'_x}{2} + \varepsilon'_{x,h}$ continuamente oscillante fra $-\frac{\Lambda_x - \lambda_x}{2} - \varepsilon$ e $\frac{\Lambda_x - \lambda_x}{2} + \varepsilon$, o fra $-\frac{\Lambda'_x - \lambda'_x}{2} - \varepsilon$ e $\frac{\Lambda'_x - \lambda'_x}{2} + \varepsilon$, essendo ε una quantità positiva piccola a piacere.

La parte fissa poi $\frac{\lambda_x + \Lambda_x}{2}$ o $\frac{\lambda'_x + \Lambda'_x}{2}$ si riduce respettivamente alla derivata a destra o a quella a sinistra del punto x quando l'una o l'altra di queste derivate esiste; talchè la considerazione di queste quantità potrebbe forse con qualche vantaggio sostituirsi a quella delle derivate a destra o a sinistra di x nei casi in cui queste derivate non esistono, e λ_x, Λ_x, λ'_x, e Λ'_x sono quantità finite.

È evidente poi che le formole precedenti valgono in tutti i punti dell'intervallo che si considera quando i numeri λ e Λ corrispondenti a questo intervallo sono ambedue finiti.

155. Avendosi ora la solita funzione finita e continua $f(x)$, prendiamo a considerare insieme a lei le infinite funzioni pur finite e continue $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$ che si ottengono da $f(x)$ col togliervi le funzioni di primo grado $\mu x + \nu$, e delle quali la funzione data $f(x)$ non sarà che un caso particolare (quello cioè corrispondente a $\mu = 0$, $\nu = 0$); e riguardiamo come distinte fra loro soltanto quelle funzioni $\varphi(x)$ che differiscono pel valore di μ, giacchè il valore della costante ν non ha influenza nè sulle derivate nè sui rapporti incrementali.

Sarà facile vedere che *affinchè la solita funzione $f(x)$ in un punto x_0 abbia una derivata a destra determinata (finita però o infinita), è necessario e sufficiente che fra le infinite funzioni $\varphi(x)$ che si ottengono da $f(x)$ togliendovi le funzioni di primo grado*

$\mu x+\nu$ *(la funzione $f(x)$ inclusa) ve ne sia tutt'al più una che, considerata a destra di x_0, in questo punto x_0 non è nè crescente nè decrescente* (*).

Si osservi infatti dapprima che se la derivata di $f(x)$ nel punto x_0 a destra esiste ma è uguale a $+\infty$ o uguale a $-\infty$, le funzioni $\varphi(x)$, considerate negli intorni di x_0 a destra, nel punto x_0 saranno tutte crescenti o tutte decrescenti respettivamente; giacchè per ogni valore di μ esisterà un valore positivo h_1 tale che per h positivo e inferiore a h_1, nel primo caso si avrà sempre:

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\mu>0,$$

e nel secondo si avrà:

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\mu<0;$$

e quindi nel primo caso sarà: $\varphi(x_0+h)>\varphi(x_0)$, e nel secondo sarà: $\varphi(x_0+h)<\varphi(x_0)$.

Invece se nel punto x_0 la derivata di $f(x)$ a destra esiste ed ha un valore finito a, si vede subito al modo stesso che in questo punto x_0 le funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ corrispondenti ai valori di μ inferiori ad a saranno tutte crescenti, e quelle corrispondenti ai valori di μ inferiori ad a saranno tutte decrescenti, e non rimarrà incertezza che per la funzione $\varphi(x)=f(x)-ax-\nu$ che corrisponde a $\mu=a$; quindi evidentemente la condizione posta sopra per la esistenza della derivata di $f(x)$a destra di x_0 è condizione necessaria.

Ammesso ora che questa condizione sia soddisfatta, è facile vedere che la derivata di $f(x)$ nel punto x_0 a destra è determinata, e quindi la condizione stessa è anche condizione sufficiente per l'esistenza di questa derivata.

Se si suppone infatti dapprima che le funzioni $\varphi(x)$, consi-

(*) Una funzione che, considerata in un intorno $(x_0, x_0+\varepsilon)$ a destra di x_0, in questo punto x_0 non è nè crescente nè decrescente, deve necessariamente avere fra x_0 e $x_0+\varepsilon$ un numero infinito di massimi e di minimi, o deve avere un tratto d'invariabilità che termini in x_0 (§. 58).

derate al solito in un intorno del punto x_0 a destra, in questo punto x_0 siano tutte crescenti o siano tutte decrescenti, allora siccome, qualunque sia μ, per tutti i valori di h inferiori a un numero positivo convenientemente scelto si ha sempre:

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)-\mu h>0\,,$$

o sempre:

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)-\mu h<0\,,$$

si vedrà subito che la derivata di $f(x)$ nel punto x_0 a destra esiste, essendo però uguale a $+\infty$ o a $-\infty$ respettivamente; e se nel punto x_0 alcune delle funzioni $\varphi(x)$ sono crescenti e altre sono decrescenti, allora, osservando che per l'ipotesi fatta esiste tutt'al più un solo valore di μ pel quale la funzione $\varphi(x)$ corrispondente non è nè crescente nè decrescente nel punto x_0, e osservando anche che, se in x_0 le funzioni $\varphi(x)$ corrispondenti al valore μ_1 di μ sono crescenti, tali saranno anche quelle corrispondenti ai valori di μ inferiori a μ_1, e se le funzioni corrispondenti al valore μ_2 di μ sono decrescenti, tali saranno anche quelle corrispondenti ai valori di μ superiori a μ_2, si vedrà subito che nel caso attuale esisterà (§. 5) un valore determinato e finito a tale che le funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ per $\mu<a$ saranno tutte crescenti in x_0, e per $\mu>a$ saranno tutte decrescenti, e conseguentemente per ogni valore positivo e arbitrariamente piccolo di ε esisterà un valore positivo h_1 tale che per h positivo e inferiore a h_1 si abbia sempre:

$$f(x_0+h)-f(x_0)-(a-\varepsilon)h>0\,,\qquad f(x_0+h)-f(x_0)-(a+\varepsilon)h<0\,,$$

ovvero:

$$f(x_0+h)-f(x_0)-ah>-\varepsilon h\,,\qquad f(x_0+h)-f(x_0)-ah<\varepsilon h\,,$$

e perciò anche:

$$\lim\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a;$$

talchè, esistendo anche in questo caso nel punto x_0 la derivata di $f(x)$ a destra, si conclude che effettivamente la condizione da cui siamo partiti è anche condizione sufficiente per l'esistenza di

questa derivata; e con ciò il teorema enunciato sopra resta completamente dimostrato.

Questo teorema, applicato ai singoli punti di un intervallo dato, può naturalmente servire a riconoscere se una funzione finita e continua in tutto un intervallo ammette o nò una derivata determinata a destra (o a sinistra) di ogni punto dell'intervallo stesso.

156. Il processo che abbiamo tenuto per la dimostrazione del teorema precedente ci permette anche di dire evidentemente che: *affinchè la solita funzione $f(x)$ in un punto x_0 abbia una derivata a destra determinata e finita, è necessario e sufficiente che fra le infinite funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ che si ottengono da $f(x)$ togliendovi (o aggiungendovi) le varie funzioni di primo grado $\mu x+\nu$ (la $f(x)$ incl.), ve ne siano alcune crescenti e alcune decrescenti nel punto x_0 quando si considerano soltanto a destra di questo punto, e ve ne sia tutt'al più una che non è nè crescente nè decrescente in x_0, o anche*, il che è lo stesso, *ve ne sia una $\varphi(x)=f(x)-ax-\nu$ che segna come la linea di separazione fra le funzioni $\varphi(x)$ che in x_0 sono crescenti e quelle che in x_0 sono decrescenti*, per modo cioè che per $\mu<a$ le funzioni stesse in x_0 siano tutte crescenti, e per $\mu>a$ siano tutte deecrescenti.

E noteremo che quando il punto x_0 appartenga a un intervallo nel quale i limiti inferiore e superiore λ e Λ degli estremi oscillatorii sono finiti, necessariamente alcune delle funzioni $\varphi(x)$ saranno crescenti in x_0 e altre saranno decrescenti, talchè allora basterà occuparsi soltanto della seconda condizione che non è altro che la condizione generale; come noteremo anche che se $\varphi(x)=f(x)-ax-\nu$ è la funzione che segna la linea di separazione fra le funzioni $\varphi(x)$ che in x_0 sono crescenti e quelle che in x_0 sono decrescenti, la derivata di $f(x)$ a destra di x_0 sarà precisamente a.

157. Osserviamo poi che se in intorni sufficientemente piccoli $(x_0, x_0+\varepsilon)$ a destra di un punto x_0 una funzione non ha un numero infinito di massimi e minimi, essa nel punto x_0 deve necessariamente essere crescente o essere decrescente, o deve avere un punto limite d'invariabilità (§. 58); e se una delle solite funzioni

$\varphi(x)$, considerate nel solito intorno $(x_0, x_0+\varepsilon)$ a destra di x_0, p. es. la $\varphi(x)=f(x)-ax-\nu$, in x_0 ha un punto limite d'invariabilità, le altre funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ per $\mu<a$ saranno tutte crescenti e per $\mu>a$ saranno invece decrescenti; come anche se una funzione $\varphi(x)$, p. es. la $\varphi(x)=f(x)-ax-\nu$, in x_0 è crescente, tali saranno pure le funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ corrispondenti a $\mu<a$, e se la funzione $\varphi(x)=f(x)-ax-\nu$ in x_0 è decrescente, tali saranno anche le funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ corrispondenti a $\mu>a$.

Si dedurrà subito da ciò che se in un intorno sufficientemente piccolo $(x_0, x_0+\varepsilon)$ a destra di x_0 nessuna delle funzioni $\varphi(x)$ (la $f(x)$ inclus.) ha infiniti massimi e minimi, allora saremo evidentemente nel caso della esistenza della derivata di $f(x)$ a destra di x_0 (§. 155); e lo stesso accadrà anche se fra queste funzioni $\varphi(x)$ ve ne ha soltanto un numero finito m, come p. es. le funzioni $\varphi_1(x)=f(x)-\mu_1 x-\nu$, $\varphi_2(x)=f(x)-\mu_2 x-\nu$, $\varphi_m(x)=f(x)-\mu_m x-\nu$, che fra x_0 e $x_0+\varepsilon$ abbiano un numero infinito di massimi e di minimi, giacchè evidentemente, in questo ultimo caso, di funzioni $\varphi(x)$ che non siano nè crescenti nè decrescenti in x_0 non vi potrà essere che una soltanto delle funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_m(x)$, o una delle funzioni $\varphi(x)$ corrispondenti a un altro valore di μ per la quale il punto x_0 sia un punto limite d'invariabilità; quindi si può ora evidentemente affermare che: *se in un intorno sufficientemente piccolo* $(x_0, x_0+\varepsilon)$ *a destra di* x_0 *una funzione finita e continua* $f(x)$ *non ha infiniti massimi e minimi e neppure li acquista quando vi si toglie (o vi si aggiunge) una funzione di primo grado qualsiasi* $\mu x+\nu$; *o anche se fra le infinite funzioni* $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ *che così si ottengono (la* $f(x)$ *inclus.) ne esistono soltanto alcune, in numero finito, che nello stesso intorno hanno un numero infinito di massimi e minimi,* allora *la funzione stessa* $f(x)$ *in quel punto* x_0 *avrà una derivata a destra determinata; e questa derivata sarà anche finita se fra le funzioni* $\varphi(x)$ *ve ne saranno alcune crescenti e alcune decrescenti in* x_0 *a destra, o se il punto* x_0 *apparterrà a un intervallo nel quale i soliti numeri limiti* λ *e* Λ *corrispondenti a* $f(x)$ *sono entrambi finiti.*

158. E così in particolare ricordando anche le osservazioni

dei §§. 143 e 144, noi potremmo enunciare un teorema intorno alla esistenza e alla natura delle derivate a destra e a sinistra per le funzioni che rispetto ai massimi e minimi si comportano come quelle considerate negli stessi paragrafi; però noi troviamo utile invece di esporre alcune altre osservazioni in forza delle quali il teorema medesimo potrà essere poi enunciato per una classe molto più generale di funzioni.

S'indichi perciò con $f(x)$ una funzione qualunque finita e continua in un dato intervallo, e considerando le solite funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$, si supponga che in intorni p. e. a destra di un punto x_0, l'ampiezza dei quali può anche variare col valore di μ, nessuna delle funzioni $\varphi(x)$, ad eccezione *tutt'al più* di quelle corrispondenti a un numero finito di valori $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ di μ ($\mu_1=0, \mu_2=0, \ldots, \mu_m=0$ o $f(x)$ inclus.) abbia un numero infinito di massimi e di minimi.

Allora pel teorema del paragrafo precedente, la funzione $f(x)$ nel punto x_0 avrà una derivata a destra determinata d_{x_0}, e se questa derivata d_{x_0} è finita, la funzione $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ considerata in un intorno a destra di x_0, la cui ampiezza dipenderà ordinariamente dal valore di μ, per $\mu<d_{x_0}$ sarà crescente in x_0, e per $\mu>d_{x_0}$ sarà decrescente; quindi, per questo, e in forza ancora della ipotesi che abbiamo fatta intorno ai massimi e minimi delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ negli intorni di x_0, per ogni valore speciale di μ diverso dai numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, quando è il caso di considerarli, esisterà un intervallo di ampiezza finita $(x_0, x_0+\varepsilon)$ a destra di x_0 tale che in ogni suo punto x (gli estr. escl.) per h positivo e sufficientemente piccolo, si avrà:

$$\frac{\varphi(x\pm h)-\varphi(x)}{\pm h}\geq 0 \text{ per } \mu<d_{x_0}, \text{ e: } \frac{\varphi(x\pm h)-\varphi(x)}{\pm h}\leq 0 \text{ per } \mu>d_{x_0},$$

ovvero:

$$\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}\geq\mu \text{ per } \mu<d_{x_0}, \text{ e: } \frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}\leq\mu \text{ per } \mu>d_{x_0}.$$

Ora, siccome i numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$, se pur devono considerarsi, sono in numero finito, quand'anche d_{x_0} sia uguale a uno

di essi, esisterà un numero differente da zero e positivo σ_1 tale che per tutti i valori di μ diversi da d_{x_0} e compresi fra $d_{x_0}-\sigma_1$ e $d_{x_0}+\sigma_1$ si avranno le diseguaglianze precedenti; quindi, supponendo una volta $\mu=d_{x_0}-\sigma$, e un altra $\mu=d_{x_0}+\sigma$, con σ positivo e inferiore a σ_1 e comunque piccolo, si concluderà intanto che *quando* d_{x_0} *è finito, gli estremi oscillatorii* λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x *dei rapporti incrementali di* $f(x)$ *relativi ai punti* x *situati a destra di* x_0, *per* $x=x_0+0$ *avranno tutti per limite la derivata a destra di* x_0 *cioè* d_{x_0}.

Similmente, se p. es. $d_{x_0}=+\infty$, si osserverà che qualunque sia μ le funzioni $\varphi(x)$ considerate a destra di x_0 sono tutte crescenti in x_0; talchè quando rispetto ai massimi e minimi la funzione $f(x)$ soddisfa alle condizioni indicate sopra, per ogni valore speciale abbastanza grande di μ esisterà un intervallo sufficientemente piccolo, ma di ampiezza differente da zero a destra di x_0 $(x_0, x_0+\varepsilon)$ tale che in ogni suo punto x (x_0 escl.) si avrà sempre:
$\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}>\mu$, e quindi *coll'avvicinarsi di* x *a* x_0 *a destra gli estremi oscillatorii* λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x *avranno tutti per limite* $+\infty$, *cioè ancora la derivata a destra di* x_0 d_{x_0}; dunque, particolarizzando ora col supporre anche che le derivate d_x di $f(x)$ prese a destra dei punti x di un certo intorno a destra di x_0, o quelle d'_x prese a sinistra degli stessi punti x siano sempre determinate, si può evidentemente affermare che: *se in intorni sufficientemente piccoli a destra di un punto* x_0 *una funzione* $f(x)$ *non ha infiniti massimi e minimi e neppure li acquista togliendovi (o aggiungendovi) le varie funzioni di primo grado* $\mu x+\nu$; *o anche se fra le infinite funzioni* $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ *che così si ottengono (la* $f(x)$ *incl.) ne esistono soltanto alcune, in numero finito, che in quelli intorni hanno un numero infinito di massimi e minimi,* allora *la funzione* $f(x)$ *oltre a godere della proprietà di avere nel punto* x_0 *una derivata a destra determinata (finita o infinita)* d_{x_0}, *godrà anche dell'altra che, se esistono le sue derivate a destra* d_x *nei punti* x *di un intorno di* x_0 *a destra, queste derivate* d_x *saranno continue nel punto* x_0 *a destra; e se esistono le sue derivate* d'_x *a sinistra degli stessi punti* x *(*x_0 *al più escl.), queste derivate* d'_x *per* $x=x_0+0$ *avranno anch'esse un limite determinato che sarà*

appunto la derivata a destra nel punto x_0 cioè d_{x_0}. (S'intende che in questo teorema, come anche in quello del paragrafo precedente, gli intorni che si considerano per le varie funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, pure esistendo sempre per ogni valore speciale di μ, possono anche andare impiccolendo oltre ogni limite coll'approssimarsi di μ a certi valori speciali).

159. Osserviamo ora in generale che se in ogni intorno comunque piccolo di un punto x_0 a destra una funzione $f(x)$ ha un numero infinito di massimi e minimi, nello stesso intorno esisteranno sempre infiniti punti (massimi) nei quali gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali destri sono negativi o nulli, e infiniti altri punti (minimi) nei quali gli stessi estremi oscillatorii sono invece positivi o nulli, e lo stesso accadrà (ma inversamente) per gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali sinistri; quindi è certo che: *se una funzione $f(x)$ in ogni intorno di un punto x_0 a destra ha un numero infinito di massimi e minimi, nessuno dei varii estremi oscillatorii dei rapporti incrementali relativi ai punti x situati a destra di x_0 potrà avere un limite determinato per $x=x_0+0$, a meno che questo limite non sia uguale allo zero.*

In particolare dunque si può affermare che: *se una funzione $f(x)$ in ogni intorno di un punto x_0 a destra ha un numero infinito di massimi e minimi, e nei punti x di questo intorno ha sempre le derivate a destra d_x, o quelle a sinistra d'_x, determinate, queste derivate non potranno avere un limite determinato per $x=x_0+0$ a meno che questo limite non sia lo zero; per modo quindi che per la stessa funzione le derivate d_x prese a destra dei punti x situati a destra di x_0 non potranno essere continue nel punto x_0 a destra, senza che il valore d_{x_0} della derivata presa nel punto x_0 a destra sia uguale allo zero;* o, in altri termini: *se una funzione $f(x)$ ha un numero infinito di massimi e minimi in ogni intorno di un punto x_0 a destra e nei punti x di questo intorno (x_0 incl.) ammette sempre una derivata a destra determinata d_x, questa derivata nel punto x_0 dovrà essere zero, o dovrà avere a destra di questo punto x_0 una discontinuità di seconda specie* (§. 149).

160. Si osservi ora che quando la derivata di $f(x)$ presa nel

punto x_0 a destra ha un valore determinato e finito d_{x_0}, fra le funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ non vi è che quella corrispondente a $\mu=d_{x_0}$ che nel punto x_0 abbia la derivata a destra uguale a zero; e se d_{x_0} è infinito, la derivata di $\varphi(x)$ presa nel punto x_0 a destra è essa pure infinita qualunque sia μ. Si dedurrà da ciò immediatamente che: *se nei punti x di un intorno a destra di x_0 (x_0 incl.) le derivate a destra d_x per una funzione $f(x)$ sono sempre determinate, e nel punto x_0 sono anche continue, fra le infinite funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ (la $f(x)$ inclus.) che si ottengono da $f(x)$ togliendovi le funzioni di primo $\mu x+\nu$, ne esisterà tutt'al più soltanto* una *che in intorni comunque piccoli a destra di x_0 abbia un numero infinito di massimi e minimi;* e viceversa, pei teoremi precedenti, si potrà anche affermare che: *se fra le infinite funzioni $\varphi(x)$ (la $f(x)$ inclus.) non ve ne può essere altro che un numero finito che in intorni sufficientemente piccoli di x_0 a destra abbiano un numero infinito di massimi e minimi,* allora *le derivate d_x di $f(x)$ a destra, quando esistano anche nei punti x situati a destra di x_0, saranno continue nel punto x_0 a destra; e di funzioni $\varphi(x)$ che abbiano un numero infinito di massimi e minimi in intorni a destra di x_0 (la $f(x)$ incl.) non ve ne sarà alcuna, o ve ne sarà tutt'al più soltanto una;* talchè, *sempre sotto l'ipotesi della esistenza delle derivate di $f(x)$ prese a destra di x_0 e dei punti x situati a destra di x_0*, si può anche affermare che *se queste derivate hanno una discontinuità (di seconda specie* §. 149) *nel punto x_0 a destra, fra le funzioni $\varphi(x)$ (la $f(x)$ incl.) ne dovrà esistere un numero* infinito *che in intorni comunque piccoli del punto x_0 a destra abbiano un numero infinito di massimi e di minimi.*

161. È ora opportuno di aggiungere che *se per una funzione finita e continua $f(x)$, le derivate a destra o a sinistra dei punti x di un certo intervallo (a, b), p. es. quelle a destra d_x, oltre essere determinate (finite cioè o infinite), godono anche della proprietà che in ogni porzione di (a, b) esistano sempre altre porzioni in ogni punto delle quali le derivate stesse sono sempre continue almeno da una parte;* allora *la funzione data $f(x)$ in infiniti punti di qualsiasi porzione dell'intervallo dato avrà anche la derivata ordinaria determinata e finita; e, a meno che in quella porzione la funzione*

$f(x)$ non sia costante, esisteranno sempre in essa altre porzioni di ampiezza finita nelle quali le derivate stesse d_x saranno sempre finite e discoste da zero più di una quantità determinata, essendo al tempo stesso tutte del medesimo segno, e in quelle porzioni la funzione data $f(x)$ non farà oscillazioni e sarà sempre crescente o sempre decrescente.

Con queste ipotesi infatti in ogni porzione comunque piccola (α, β) dell'intervallo (a, b) se ne potranno sempre trovare infinite altre nei punti delle quali d_x è sempre continua almeno da una parte; e se in una di queste porzioni (a', b') d_x non sarà sempre finita, per modo che in alcuni punti essa sia p. es. uguale a $+\infty$, o prenda anche valori p. es. positivi e maggiori di qualunque numero dato, a destra o a sinistra di questi punti dovranno sempre esistere degli intorni nei punti dei quali d_x sia sempre positivo.

Ma allora, pel teorema dei §§. 135 o 146, la funzione d_x nei punti di questi intorni non potrà essere sempre infinita, e in essi dovranno esistere necessariamente dei punti x', x'', ... nei quali essa ha un valore finito; dunque poichè nei punti di (a', b') d_x è sempre continua almeno da una parte, è certo che in (a', b') esisteranno anche degli intervalli (intorni cioè dei nuovi punti x', x'', ...) in ogni punto dei quali d_x è sempre finita; talchè si può ora intanto asserire che sotto le fatte ipotesi, in ogni porzione (α, β) di (a, b) ne esisteranno infinite altre nei punti delle quali le derivate a destra d_x oltre essere sempre continue almeno da una parte, sono anche numericamente inferiori a un numero finito.

Ora, se (a_1, b_1) è una di queste porzioni di (α, β), in essa la funzione d_x sarà continua totalmente o generalmente o sarà una funzione punteggiata discontinua (§. 153); quindi entro (a_1, b_1) dovranno sempre esistere infiniti punti nei quali d_x è assolutamente continua, e per quanto si disse al §. 148, la funzione $f(x)$ in questi punti avrà anche la derivata ordinaria determinata e finita; talchè intanto può dirsi dimostrata una parte del teorema enunciato.

Aggiungiamo ora che, quando $f(x)$ non è sempre costante fra a_1, e b_1, pel teorema dei §§. 79 o 146 la derivata d_x non

potrà essere zero in ogni punto di (a_1, b_1), ma dovranno esistere infiniti punti di questo intervallo nei quali essa è differente da zero; quindi, poichè in ogni punto di (a_1, b_1) la funzione d_x è continua almeno da una parte, esisteranno pure degli intervalli di ampiezza finita fra a_1 e b_1 in ogni punto dei quali la funzione stessa d_x è finita e differente da zero più di una quantità determinata, e ha sempre il medesimo segno; talchè, osservando che quest'ultima circostanza porta anche che negli stessi intervalli la funzione $f(x)$ sia sempre crescente o sia sempre decrescente, il teorema enunciato sopra può dirsi ora completamente dimostrato in tutte le sue parti.

162. Riunendo ora i varii risultati che quì abbiamo ottenuto, si giunge con tutta facilità al teorema seguente che è quello cui alludevamo in principio del §. 158: *se in tutto un intervallo* (a, b) *una funzione finita e continua* $f(x)$ *non ha infiniti massimi e minimi, e neppure li acquista quando vi si toglie (o vi si aggiunge) una funzione di primo grado qualsiasi* $\mu x+\nu$; *o anche, se fra le infinite funzioni* $\varphi(x)$ *che così si ottengono (la* $f(x)$ *incl.) per ogni punto* x_0 *di* (a, b) *ne esiste tutt'al più una che in ogni intorno comunque piccolo a destra di* x_0 *venga a avere un numero infinito di massimi e minimi; e una circostanza simile si presenta per gli intorni di* x_0 *a sinistra;* allora:

1.° *la funzione* $f(x)$ *avrà sempre una derivata determinata (finita però o infinita) sì a destra che a sinistra di ogni punto dell'intervallo dato* (a, b).

2.° *la derivata* d_x *di questa funzione* $f(x)$ *presa* a destra *dei punti* x *dell'intervallo dato* (b *escl. se* $b>a$) *costituirà una funzione che sarà sempre continua o che avrà tutt'al più soltanto delle discontinuità ordinarie* a sinistra *di alcuni punti (in numero finito o infinito).*

3.° *la derivata* d'_x a sinistra *dei punti* x *dello stesso intervallo* (a *escl.*) *costituirà anch'essa una funzione che sarà sempre continua o che avrà soltanto delle discontinuità ordinarie* a destra *di alcuni punti; e in ogni punto* x *interno all'intervallo dato si avrà* $d_{x+0}=d_x$, $d_{x-0}=d'_x$, $d'_{x+0}=d_x$, $d'_{x-0}=d'_x$, *essendo* d_{x+0}, d'_{x+0} *i limiti che si hanno per* d_x *e* d'_x *coll'avvicinarsi indefinitamente al punto* x_0 *a destra, ec....*

4.° *in ogni porzione comunque piccola dell'intervallo stesso esisteranno sempre degli intervalli di ampiezza finita nei quali sì le derivate a destra che quelle a sinistra, oltre essere determinate, sono anche finite, per modo che negli intervalli stessi esse saranno funzioni finite e continue totalmente o generalmente, o funzioni punteggiate discontinue; e a meno che nella stessa porzione la funzione $f(x)$ non sia costante, queste derivate in intervalli di ampiezza finita presi nella porzione medesima saranno anche discoste da zero più di una quantità determinata, e saranno sempre dello stesso segno, per modo che in quelli intervalli la funzione $f(x)$ non farà oscillazioni e sarà sempre crescente o sempre decrescente.*

5.° *in ogni porzione dell'intervallo dato vi saranno sempre anche infiniti punti nei quali esisterà e avrà un valore finito anche la derivata intesa nel senso ordinario.*

Naturalmente poi, *le particolarità che qui si hanno per le funzioni $f(x)$ si hanno al tempo stesso anche per le funzioni $\varphi(x)$*; e se i soliti numeri λ e Λ relativi a $f(x)$ per l'intervallo (a, b) che si considera sono finiti, le derivate delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ a destra e a sinistra dei punti di questo intervallo saranno sempre finite e comprese fra λ e Λ o fra $\lambda-\mu$ e $\Lambda-\mu$ (questi limiti inclusi o nò).

163. E per quanto si disse al §. 160 s'intende subito anche che delle funzioni cui si riferisce il teorema ora enunciato sono casi particolarissimi quelle dei §§. 143 e 144 per le quali cioè fra le funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ ne esistono soltanto alcune in numero finito che *fra a e b* hanno un numero infinito di massimi e minimi; talchè *anche a queste ultime funzioni si applica in tutte le sue parti il teorema ora enunciato.*

164. E sempre per quanto si disse al §. 160 si può evidentemente, come teorema reciproco di quello del §. 162, enunciare l'altro che dice che: *quando per una funzione finita e continua $f(x)$ le derivate a destra e a sinistra dei punti x di un dato intervallo esistono e sono continue a destra e a sinistra respettivamente degli stessi punti, questa funzione $f(x)$ rispetto ai massimi e minimi godrà delle proprietà poste in principio per le funzioni del teorema del* §. 162, *e per essa sussisteranno anche tutte le altre proprietà*

del medesimo teorema; talchè si può ora asserire che: *quando per una funzione si richieda che le derivate prese a destra e quelle prese a sinistra dei punti di un dato intervallo, oltre essere determinate siano anche continue respettivamente a destra e a sinistra dei punti corrispondenti, le condizioni poste in principio del teorema del* §. 162 *possono riguardarsi come condizioni* necessarie e sufficienti *per l'esistenza di queste derivate.*

165. Inoltre notiamo che quando per la funzione $f(x)$ del teorema del §. 162, non si fosse posta alcuna condizione rispetto agli intorni a sinistra dei punti dell'intervallo (a, b), lasciando però ferme le altre condizioni, noi avremmo ancora potuto enunciare il teorema stesso in quelle parti che riguardano l'esistenza delle derivate a destra e la loro continuità a destra dei singoli punti, e in quelle parti anche che si riferiscono alla esistenza degli intervalli nei quali queste derivate sono finite e diverse da zero, e alla esistenza della derivata ordinaria in infiniti punti dell'intervallo (a, b), ec. . . .

166. In forza poi del teorema del §. 162 e sempre *per le funzioni cui il teorema stesso si riferisce,* si potrà anche asserire che se in un punto x_0 *interno* all'intervallo dato la derivata a destra ha un valore d_{x_0} differente dal valore d'_{x_0} che essa ha a sinistra, e si ha p. es. $d_{x_0} > d'_{x_0}$, in ogni intorno sufficientemente piccolo del punto x_0 accadrà che le derivate a destra e a sinistra prese nei punti dello stesso intorno che sono situati a destra di x_0 non saranno mai inferiori a d_{x_0} più di una quantità arbitrariamente piccola σ, mentre quelle prese nei punti dello stesso intorno che trovansi a sinistra di x_0 non saranno mai superiori a d'_{x_0} più di σ; per modo cioè che *nessuna delle derivate a destra o a sinistra dei punti dell'intiero intorno che si considera prenderà valori compresi fra* $d'_{x_0}-\sigma$ *e* $d_{x_0}+\sigma$, e questi valori verranno così in certo modo ad essere saltati tutti quanti dalle derivate a destra e da quelle a sinistra, e *al limite si avrà un vero e proprio salto da* d'_{x_0} *a* d_{x_0}.

167. In forza ancora del teorema del §. 162, e sempre *per le funzioni* $f(x)$ *cui il teorema stesso si riferisce* si può anche evidentemente aggiungere che: *quando in alcuni punti di intorni comunque piccoli di un punto* x_0 *le derivate a destra o quelle a sinistra*

prendono valori vicini quanto si vuole a una data quantità finita A, *o prendono valori p. es. positivi e maggiori di qualunque numero finito,* allora *nel punto x_0 una almeno delle due derivate a destra e a sinistra d_{x_0} e d'_{x_0} prenderà effettivamente il valore* A, *o il valore $+\infty$ respettivamente.*

E valendosi ora di questo teorema è facile anche di dimostrare, sempre *per le stesse funzioni $f(x)$*, che: *quando le derivate a destra o quelle a sinistra in punti dell'intervallo* (a, b) *prendono anche valori prossimi quanto si vuole a una data quantità finita* A, *o prendono p. es. valori positivi e maggiori di qualsiasi numero dato, esisterà sempre fra a e b (a e b incl.) almeno un punto determinato x_0 nel quale una almeno delle due derivate a destra o a sinistra d_{x_0} o d'_{x_0} prenderà effettivamente il valore* A, *o il valore $+\infty$ respettivamente.*

Nel primo caso infatti, il limite inferiore dei valori di una almeno delle quantità $(d_x—\text{A})^2$, $(d'_x—\text{A})^2$ nell'intervallo (a, b) sarà evidentemente uguale allo zero; quindi, attribuendo un valore positivo qualunque diverso da zero nel punto b alla prima e nel punto a alla seconda di queste quantità $(a<b)$, pel teorema di Weierstrass (§. 36) si scorgerà subito che fra a e b (a e b inclus.) dovrà esistere almeno un punto determinato x_0 tale che in alcuni punti x di ogni suo intorno comunque piccolo d_x o d'_x prenderanno valori prossimi quanto si vuole ad A; e questo, pel teorema enunciato testè, porta appunto che si abbia o $d_{x_0}=\text{A}$, o $d'_{x_0}=\text{A}$.

Similmente nel secondo caso, osservando che allora $+\infty$ è il limite superiore dei valori di d_x e di d'_x, e ricordando le proprietà di questo limite, si vede subito che esisterà almeno un punto x_0 fra a e b in ogni intorno del quale d_x o d'_x prenderanno anche valori positivi maggiori di qualunque numero dato, e perciò in questo punto x_0 si avrà o $d_{x_0}=+\infty$, o $d'_{x_0}=+\infty$; talchè il teorema enunciato può dirsi ora completamente dimostrato.

168. I teoremi enunciati nei §§. 157 e seg. danno delle condizioni per la esistenza delle derivate a destra di un punto, o dall'una o dall'altra parte dei punti di un dato intervallo, e danno delle proprietà generali relative a queste derivate. Indipendentemente poi anche da questi teoremi, si poteva fin da principio

osservare che quando una funzione $f(x)$ non ha una derivata determinata (finita o infinita) a destra di un punto x_0, e λ_{x_0}, Λ_{x_0} sono gli estremi oscillatorii corrispondenti a questo punto (che allora saranno differenti fra loro), le *infinite* funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ che si ottengono da $f(x)$ togliendovi le funzioni di primo grado $\mu x+\nu$ corrispondenti ai valori di μ compresi fra λ_{x_0} e Λ_{x_0} (questi limiti al più esclusi) avranno tutte un numero infinito di massimi e minimi nelle vicinanze di x_0 a destra, giacchè evidentemente pel punto x_0 i loro rapporti incrementali destri $\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$ coll'impiccolire indefinito di h passeranno continuamente dal positivo al negativo; quindi anche senza i risultati precedenti avremmo potuto asserire che *la mancanza di una derivata determinata a destra di x_0 (finita o infinita) in una funzione $f(x)$, porta di necessità che nella serie di funzioni formata dalla funzione $f(x)$ e dalle solite funzioni $\varphi(x)$ che si ottengono da lei togliendovi o aggiungendovi le varie funzioni di primo grado $\mu x+\nu$, ne esista un numero* infinito *che in ogni intorno $(x_0, x_0+\varepsilon)$ di x_0 a destra presentino infiniti massimi e minimi.*

Aggiungiamo che *l'essere zero o l'essere infinite le derivate a destra o a sinistra di una funzione $f(x)$ in alcuni punti di qualsiasi porzione comunque piccola di un dato intervallo nel quale essa non è costante porta ancora di necessità che fra le solite funzioni $\varphi(x)$ (la $f(x)$ incl.) ne esista un numero* infinito *che nelle stesse porzioni hanno infiniti massimi e minimi,* perchè altrimenti per il teorema del §. 162 nelle porzioni medesime dell'intervallo dato vi sarebbero sempre altri intervalli nei punti dei quali sì le derivate a destra che quelle a sinistra sarebbero determinate e finite e discoste da zero; quindi, mentre, a conferma di quanto fu detto nel §. 132, apparisce chiaro di quì che la presenza delle indicate singolarità nelle derivate di una funzione a destra o a sinistra dei punti di un dato intervallo non può sempre attribuirsi alla presenza di massimi e minimi in numero infinito nelle funzioni stesse, resta però assicurato che quando le dette singolarità nelle derivate esistono, gli infiniti massimi e minimi devono sempre comparire, se non nella funzione data, in *infinite* funzioni che si deducono da lei togliendovi alcune funzioni di primo grado.

169. Merita poi di essere notato come i risultati quì ottenuti pongono sempre più in evidenza quanto fosse incompleta la dimostrazione di Ampère (§. 69) intorno alla esistenza delle derivate delle funzioni finite e continue $f(x)$, e come altresì colle sole considerazioni di Ampère e colla sola limitazione intorno al numero delle oscillazioni di $f(x)$ era impossibile giungere a conclusione veruna; poichè, supponendo pure che la funzione $f(x)$ nell'intervallo dato non avesse infinite oscillazioni (*), non si veniva con ciò ad escludere (§§. 131 e seg.) che queste infinite oscillazioni si presentassero nelle funzioni che risultano da $f(x)$ aggiungendovi o togliendovi le funzioni di primo grado $\mu x+\nu$; e oltre a ciò poi, onde poter giungere a qualche conclusione giusta, sarebbe stato sempre necessario tener distinte le derivate a destra da quelle a sinistra per considerarle separatamente, come noi abbiamo fatto nel teorema del §. 162 e negli altri, e come conviene fare in studii così generali.

Lo stesso può dirsi delle dimostrazioni che ordinariamente si sono date fino a questi ultimi anni intorno alla esistenza delle derivate, o intorno all'ordine d'infinitesimo delle quantità $f(x+h)-f(x)$ per h tendente a zero.

170. Il teorema del §. 162 adunque può considerarsi come rettificazione e complemento di quello di Ampère; e io credo anche che sia il primo teorema generale che dà una classe estesissima di funzioni per le quali, indipendentemente da ogni loro rappresentazione analitica, si può affermare subito l'esistenza di una derivata a destra o a sinistra sempre determinata (finita però o infinita).

Pel caso poi che invece di considerare le derivate soltanto da una parte, si vogliano considerare le derivate ordinarie, osserverò soltanto che, ripetendo quei ragionamenti stessi che si fecero per dimostrare il teorema del §. 155, si trova subito che *affinchè la solita funzione finita e continua $f(x)$ in un punto x_0*

(*) Ampère propriamente non fà *in modo esplicito* neppure questa limitazione, ma essa risulta chiaramente da tutto l'insieme della sua dimostrazione; e d'altra parte, fin allora non si erano mai considerate funzioni che in un intervallo finito avessero un numero infinito di oscillazioni.

interno all'intervallo che si considera abbia la derivata (ordinaria) determinata (finita cioè o infinita e determinata di segno), è necessario e sufficiente che fra le infinite funzioni $\varphi(x)$ che si ottengono da lei togliendovi o aggiungendovi le funzioni di primo grado $\mu x+\nu$ (la funzione $f(x)$ inclus.) ve ne sia tutt'al più una che considerata in un intorno (completo) $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon_1)$ di x_0, in questo punto x_0 non è nè crescente nè decrescente.

E aggiungerò anche che limitatamente *alle funzioni cui si riferisce il teorema del* §. 162 si trova con tutta facilità che *affinchè esse abbiano la derivata (ordinaria) determinata in ogni punto x_0 interno all'intervallo nel quale si considerano, è necessario e sufficiente che fra le solite funzioni $\varphi(x)$ ve ne sia tutt'al più una che in questo punto x_0 è massima o minima.*

171. Trovo ora opportuno di aggiungere anche le osservazioni seguenti.

S'indichino con λ e Λ i soliti limiti inferiori e superiori degli estremi oscillatorii per una funzione $f(x)$ finita e continua in tutto un intervallo (a, b) $(b>a)$; e supponendo λ e Λ differenti fra loro, si prenda a considerare la funzione $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ ove μ è un numero compreso fra λ e Λ (λ e Λ escl.).

A causa delle particolarità dei numeri λ e Λ (§§. 141 e 147) si potranno trovare fra a e b due punti x_1 e x_2 (differenti fra loro e da b) tali che per valori positivi e sufficientemente piccoli di h si abbia: $\varphi(x_1+h)-\varphi(x_1)>0$, $\varphi(x_2+h)-\varphi(x_2)<0$; quindi nell'intervallo (x_1, x_2+h) se $x_1<x_2$, o nell'altro (x_2, x_1+h) se $x_1>x_2$, dovrà esistere almeno un punto *interno* determinato x' nel quale la funzione $\varphi(x)$ è massima o minima.

Ciò equivale a dire che nell'intervallo (a, b) esisterà almeno un punto *interno* x' tale che, quando h è positivo e sufficientemente piccolo, si avrà sempre:

$$\varphi(x'\pm h)-\varphi(x')\leq 0\,, \text{ o sempre: } \varphi(x'\pm h)-\varphi(x')\geq 0,$$

e perciò sarà o:

$$\frac{\varphi(x'+h)-\varphi(x')}{h}\leq 0, \text{ con: } \frac{\varphi(x'-h)-\varphi(x')}{-h}\geq 0,$$

o:

$$\frac{\varphi(x'+h)-\varphi(x')}{h}\geq 0\,,\ \text{con:}\ \frac{\varphi(x'-h)-\varphi(x')}{-h}\leq 0\,;$$

quindi sostituendo per $\varphi(x)$ il suo valore, e osservando che ora non è più necessario supporre che λ e Λ siano differenti fra loro, si potrà subito senz'altro affermare che: " se λ e Λ sono i soliti " limiti inferiore e superiore degli estremi oscillatorii relativi a " una funzione $f(x)$ finita e continua nell'intervallo (a, b), e μ è " un numero qualunque compreso fra i limiti λ e Λ (questi limiti " al più escl.), nell'intervallo (a, b) esisterà sempre almeno un " punto *interno* determinato x' pel quale quando h è positivo e " sufficientemente piccolo uno dei due rapporti incrementali destro " e sinistro $\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}$ non è mai superiore a μ, e l'altro non " è mai inferiore a μ, per modo cioè che si ha sempre:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}\leq\mu\,,\ \text{con:}\ \frac{f(x'-h)-f(x')}{-h}\geq\mu\,,$$

" o sempre:

$$\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}\geq\mu\,,\ \text{con:}\ \frac{f(x'-h)-(x')}{-h}\leq\mu\,.$$

172. Questo risultato conduce a due teoremi molto notevoli.

1.° Supponiamo in particolare che la nostra funzione $f(x)$ sia di quelle che ammettono sempre una derivata ordinaria determinata (finita cioè, o infinita e determinata di segno) $f'(x)$, e osserviamo che allora λ e Λ non sono altro che i limiti inferiori e superiori dei valori di $f'(x)$ nell'intervallo (a, b); si vedrà subito che il valore $f'(x')$ di questa derivata nel punto x' determinato sopra sarà precisamente μ, e, completando così la terza parte del teorema del § 71. si concluderà che: *se la funzione $f(x)$, oltre essere finita e continua nell'intervallo (a, b), ammette sempre una derivata ordinaria determinata (finita cioè, o infinita e determinata di segno), questa derivata, pur potendo avere fra a e b anche un numero infinito di discontinuità (discontinuità di seconda specie*

§. 78 *o* §. 149), *passerà per tutti i valori compresi fra il suo limite inferiore* λ *e il suo limite superiore* Λ (*questi limiti al più escl.*).

2.° Se la funzione $f(x)$ fosse tale che in un intorno sufficientemente piccolo $(x'-\varepsilon,\ x'+\varepsilon)$ del punto x' determinato sopra la funzione corrispondente $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ non avesse un numero infinito di massimi e minimi, allora esisterebbe un intervallo di ampiezza finita $(x',\ x'+\delta)$ a destra di x', in ogni punto x del quale (gli estr. escl.), per h sufficientemente piccolo e al suo successivo impiccolirsi, si avrebbe sempre:

$$\frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}\geq\mu, \text{ o sempre: } \frac{f(x\pm h)-f(x)}{\pm h}\leq\mu,$$

mentre in ogni punto x di un certo intervallo $(x'-\delta,\ x')$ a sinistra di x' si avrebbero invece le diseguaglianze opposte.

Ma d'altra parte, se si ammette che la funzione primitiva $f(x)$ in qualunque porzione comunque piccola dell'intervallo $(a,\ b)$ abbia un numero infinito di massimi e di minimi o presenti dei tratti d'invariabilità, i suoi rapporti incrementali destro e sinistro in infiniti punti di ogni porzione dell'intervallo dato al successivo impiccolire di h dovranno prendere valori di segni differenti, o almeno dovranno essere zero, e quindi per μ diverso da zero non potrà allora esistere nessun intorno a destra e a sinistra del punto x' nel quale siano verificate sempre le diseguaglianze precedenti o sempre le diseguaglianze opposte; dunque, si potrà ora evidentemente affermare che: *se* $f(x)$ *è una funzione finita e continua che in qualsiasi porzione dell'intervallo* $(a,\ b)$ *ha un numero infinito di massimi e minimi o presenta dei tratti d'invariabilità, tutte le funzioni* $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ *che si ottengono da* $f(x)$ *togliendovi le funzioni di primo grado* $\mu x+\nu$ *nelle quali* μ *è compreso fra i limiti inferiore e superiore* λ *e* Λ *degli estremi oscillatorii corrispondenti a* $f(x)$ (*questi limiti escl.*) *avranno infiniti massimi e minimi negli intorni di un numero finito o infinito di punti dell'intervallo dato.*

In particolare dunque, *sempre nella ipotesi che* $f(x)$ *in qualsiasi porzione dell'intervallo dato abbia un numero infinito di massimi e minimi o presenti dei tratti d'invariabilità,* si potrà

anche asserire *che quando* λ *e* Λ *sono finiti, col passare di* x *da* a *a* b $(a<b)$ *le funzioni* $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ *per* $\mu<\lambda$ *saranno sempre crescenti; per* $\mu>\Lambda$ *saranno sempre decrescenti; e per* μ *compreso fra* λ *e* Λ (λ *e* Λ *escl.*) *avranno tutte fra* a *e* b *un numero infinito di massimi e minimi.*

Osservando poi che, se λ è finito, per $\mu=\lambda$ la funzione corrispondente $\varphi(x)$ in forza del teorema del §. 146 non potrà andar mai decrescendo col passare di x da a a b, mentre, se Λ è finito quella corrispondente a $\mu=\Lambda$ non potrà andar mai crescendo, si potrà anche asserire che qualunque siano le particolarità che la funzione $f(x)$ presenta rispetto ai massimi e minimi o rispetto ai tratti d'invariabilità, *se* λ *è finito la funzione* $\varphi(x)=f(x)-\lambda x-\nu$ *che corrisponde a* $\mu=\lambda$ *col passare di* x *da* a *a* b *non andrà mai decrescendo, e se* Λ *è finito la funzione* $\varphi(x)=f(x)-\Lambda x-\nu$ *che corrisponde a* $\mu=\Lambda$ *non andrà mai crescendo.*

173. La considerazione delle funzioni $\varphi(x)$ che si ottengono da $f(x)$ togliendovi le funzioni di primo grado $\mu x+\nu$, è quella che ci ha condotti alla dimostrazione della maggior parte dei teoremi che quì abbiamo dati; e anzi possiamo asserire che queste funzioni $\varphi(x)$ costituiscono un elemento importante per studî del genere di quelli che quì abbiamo fatti, e devono essere considerate insieme alla primitiva $f(x)$, poichè i risultati precedenti ci mostrano che quelle singolarità che talvolta si incontrano cercando le derivate di una funzione, anzichè attribuirsi a singolarità che compariscono in questa funzione devono invece attribuirsi a singolarità che si presentano soltanto in alcune delle funzioni corrispondenti $\varphi(x)$. In modo simile la considerazione delle funzioni $\psi(x)$ che si ottengono da $f(x)$ aggiungendovi o togliendovi funzioni di secondo grado ax^2+bx+c o dei gradi superiori condurrebbe a altre proprietà delle funzioni, e specialmente a quelle che si connettono colle questioni relative alle derivate seconde, e a quelle degli ordini superiori; però noi non entreremo ora in questo studio, e soltanto per accennare come la considerazione di queste nuove funzioni $\psi(x)$ possa tornare utile, ce ne varremo per dimostrare due proprietà delle funzioni, la prima delle quali è la seguente: *se per una funzione finita e continua* $f(x)$ *le derivate* d_x

a destra e quelle d'_x a sinistra dei punti x di un dato intervallo sono sempre determinate e finite, esse non possono differire l'una dall'altra in ogni punto di una porzione comunque piccola dell'intervallo stesso senza che avvenga che in infiniti punti della porzione medesima la loro differenza $d_x - d'_x$ sia positiva e in infiniti altri sia negativa.

Si consideri infatti nella porzione (α, β) la funzione:

$$\psi(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\left\{f(\beta)-f(\alpha)\right\}+\theta(x-\alpha)(\beta-x),$$

essendo θ un numero fisso positivo o negativo.

Questa funzione si annullerà per $x=\alpha$ e $x=\beta$; e se θ è abbastanza grande in valore assoluto e $\alpha>\beta$, almeno per alcuni valori di x fra α e β essa avrà il segno di θ; quindi per θ abbastanza grande e positiva essa avrà un massimo positivo in un punto x' *interno* all'intervallo (α, β), mentre per θ negativo e abbastanza grande in valore assoluto essa avrà un minimo negativo in un punto x'' *interno* allo stesso intervallo.

In questi casi dunque, per h positivo e sufficientemente piccolo, avremo respettivamente:

$$\psi(x'+h)-\psi(x')\leq 0, \qquad \psi(x'-h)-\psi(x')\leq 0,$$
$$\psi(x''+h)-\psi(x'')\geq 0, \qquad \psi(x''-h)-\psi(x'')\geq 0,$$

e perciò sarà:

$$\frac{\psi(x'+h)-\psi(x')}{h}-\frac{\psi(x'-h)-\psi(x')}{-h}\leq 0,$$

$$\frac{\psi(x''+h)-\psi(x'')}{h}-\frac{\psi(x''-h)-\psi(x'')}{-h}\geq 0;$$

quindi, poichè si ha in generale:

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}-\frac{\psi(x-h)-\psi(x)}{-h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}-2\theta h,$$

e h può prendersi arbitrariamente piccolo, si vede subito di quì che, comunque sia stato preso il θ, la differenza $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ nel punto x' non potrà avere un

limite positivo, mentre nel punto x'' non potrà avere un limite negativo; e si conclude perciò che nell'intervallo (α, β) dovranno esistere dei punti x' pei quali si ha: $d_{x'}-d'_{x'}\leq 0$, e dei punti x'' pei quali si ha invece: $d_{x''}-d'_{x''}\geq 0$; e questo dimostra evidentemente il teorema.

174. Oltre a ciò aggiungiamo che, colla considerazione delle funzioni $\psi(x)$ che si deducono da $f(x)$ togliendovi delle funzioni di secondo grado, si può estendere il teorema del §. 82 dimostrando che *quando una funzione $f(x)$ è finita e continua in un dato intervallo, e in un punto x' interno a questo intervallo oltre ad avere la derivata prima determinata e finita, ha anche la derivata seconda $f''(x')$ determinata (finita cioè o infinita e determinata di segno), questa derivata seconda sarà sempre il limite per $h=0$ del rapporto* $\frac{f(x'+h)-2f(x')+f(x'-h)}{h^2}$.

Consideriamo infatti la funzione $\psi(x)=f(x)-\frac{\theta}{2}x^2$, ove θ è una costante qualunque, e osserviamo che (per quanto lo abbiamo taciuto nell'enunciato) l'esistenza della derivata seconda di $f(x)$ nel punto x' suppone anche quella della derivata prima in ogni punto di un intorno sufficientemente piccolo $(x'-\varepsilon_1,\ x'+\varepsilon_2)$ di x'; e lo stesso accadrà in conseguenza per la funzione $\psi(x)$, per modo che se h è un numero positivo sufficientemente piccolo, si avrà (§. 72, 6.°)

$$(1)\qquad \begin{cases} \psi(x'+h)-\psi(x') = h\psi'(x'+\theta_1 h), \\ \psi(x'-h)-\psi(x')=-h\psi'(x'-\theta_2 h), \end{cases}$$

con θ_1 e θ_2 compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.); e perciò sarà:

$$\frac{\psi(x'+h)-2\psi(x')+\psi(x'-h)}{h^2}=\frac{\psi'(x'+\theta_1 h)}{h}-\frac{\psi'(x'-\theta_2 h)}{h},$$

e siccome $\psi'(x')$ è determinato e finito, e θ_1 e θ_2 sono differenti da zero, si potrà anche scrivere:

$$(2)\quad \frac{\psi(x'+h)-2\psi(x')+\psi(x'-h)}{h^2}=\theta_1\frac{\psi'(x'+\theta_1 h)-\psi'(x')}{\theta_1 h}+\theta_2\frac{\psi'(x'-\theta_2 h)-\psi'(x')}{-\theta_2 h}.$$

Ora, nel caso che $f''(x')$ sia una quantità finita k, prendendo nella espressione di $\psi(x)$, $\theta=k$, si ha $\psi''(x')=0$; quindi coll'im-

piccolire indefinito di h, siccome θ_1 e θ_2 sono sempre compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) e i termini che essi moltiplicano nel secondo membro della formola precedente sono valori dei rapporti incrementali destri e sinistri di $\varphi'(x)$ relativi al punto x', è certo che questi termini avranno per limite zero, e perciò si avrà, come al §. 82, $\lim\frac{\psi(x'+h)-2\psi(x')+\psi(x'-h)}{h^2}=0$, ovvero:

$$\lim\frac{f(x'+h)-2f(x')+f(x'-h)}{h^2}=k=f''(x').$$

Se poi si ha p.es. $f''(x')=+\infty$, allora sarà anche $\psi''(x')=+\infty$ per qualunque valore finito di θ; e quindi, siccome θ_1 e θ_2 sono positivi, i due termini del secondo membro della formola (2) col tendere di h a zero dovranno avere per limite zero, o una quantità positiva finita o infinita, o dovranno oscillare senza essere mai negativi.

Ma se il secondo membro della formola (2) non avesse per limite $+\infty$ per qualunque valore di θ, o in altri termini, se per un valore θ_0 di θ avvenisse che il secondo membro della formola (2), per quanto si facesse impiccolire h, non finisse per restare *sempre* maggiore di qualunque numero dato p. es. ω, allora, indicando con $\psi_0(x)$ la funzione $\psi(x)$ corrispondente al valore θ_0 di θ, e con $\psi_1(x)$ quella corrispondente a $\theta=\theta_0+\omega$, si avrebbe evidentemente:

$$\frac{\psi_1(x'+h)-2\psi_1(x')+\psi_1(x'-h)}{h^2}=\frac{\psi_0(x'+h)-2\psi_0(x')+\psi_0(x'-h)}{h^2}-\omega,$$

e quindi, per quanto si impiccolisse h, il rapporto $\frac{\psi_1(x'+h)-2\psi_1(x')+\psi_1(x'-h)}{h^2}$ non finirebbe mai per essere *sempre* positivo e differente da zero, e questo è in contradizione con quanto abbiamo detto sopra; dunque conviene ammettere che qualunque sia θ il secondo membro della formola (2) per $h=0$ abbia per limite $+\infty$, e questo porta evidentemente a concludere che anche in questo caso si ha:

$\lim\frac{\psi(x'+h)-2f(x')+\psi(x'-h)}{h^2}=+\infty=f''(x')$, talchè il teorema enunciato sopra è ora completamente dimostrato.

È da notare che rispetto alla derivata seconda di $f(x)$ la dimostrazione precedente suppone soltanto che essa abbia un valore determinato nel punto x', e non suppone nulla rispetto agli altri punti, nei quali in conseguenza questa derivata può anche non esistere affatto, senza che il teorema cessi per questo di esser vero.

175. Notiamo inoltre che, considerando sempre la funzione $\psi(x)=f(x)-\frac{\theta}{2}x^2$, se invece delle formole (1) si fa uso delle altre:

$$\psi(x'+2h)=\psi(x')+2h\psi'(x'+2\theta'h)$$
$$\psi(x'+h)=\psi(x')+h\psi'(x'+\theta''h),$$

ove θ' e θ'' sono compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), si giunge alla seguente:

$$\frac{\psi(x'+2h)-2\psi(x'+h)+\psi(x')}{h^2}=4\theta'\frac{\psi'(x'+2\theta'h)-\psi'(x')}{2\theta'h}-$$
$$-2\theta''\frac{\psi'(x'+\theta''h)-\psi'(x')}{\theta''h},$$

dalla quale si deduce subito, come nel caso precedente, che se in un punto x' (che ora può essere anche un estremo dell'intervallo che si considera) una funzione $f(x)$ ha la derivata seconda presa da una parte di x' determinata e finita, questa derivata seconda sarà sempre il limite del rapporto $\frac{f(x'+2h)-2f(x'+h)+f(x')}{h^2}$, preso questo limite per $h=+0$ o per $h=-0$ secondochè la detta derivata deve essere presa a destra respettivamente o a sinistra del punto x'. — E naturalmente se questa derivata seconda sarà la stessa sì a destra che a sinistra, cioè se esisterà la ordinaria derivata seconda, il limite della espressione scritta sopra verrà ad essere uguale a questa derivata tanto per $h=+0$, quanto per $h=-0$.

Questi resultati, oltre al rigore portano anche una maggiore generalità nei teoremi che ordinariamente si danno nei trattati di calcolo differenziale sulle differenze e sui differenziali secondi, e potrebbero estendersi alle differenze e differenziali degli ordini superiori.

176. Gli studii che quì abbiamo fatto intorno alle derivate delle funzioni finite e continue non possono dirsi completi; e forse anche avrebbero potuto essere esposti con un ordine migliore, ove non me lo avessero impedito varie circostanze, non ultima delle quali quella che essi sono stati fatti in epoche differenti e in parte anche quando la loro stampa era già incominciata.

Ciò non ostante io annetto una certa importanza a questi studii, e credo che attenendosi alla via in essi seguita si potrà giungere a trovare anche qualche cosa di più completo e di più semplice intorno alle derivate delle funzioni finite e continue.

Del resto poi, riassumendo, si trova che gli studii che noi abbiamo fatti, per quanto incompleti essi siano, mettono già in chiara luce alcune particolarità assai notevoli.

Risulta infatti da ciò che precede, che per le funzioni che, sebbene finite e continue in un dato intervallo, in qualsiasi porzione dell'intervallo stesso hanno un numero infinito di massimi e minimi, le derivate, quand'anche siano prese soltanto da una parte dei punti dello stesso intervallo possono non essere mai determinate e finite; e quando esistono, esse hanno una discontinuità dalle due parti in punti di qualunque porzione dell'intervallo primitivo (§. 161); talchè queste funzioni devono essere assolutamente escluse dalla classe di quelle alle quali si applica il calcolo differenziale, almeno quando oltre alla prima si vogliono considerare anche alcune delle derivate degli ordini superiori.

Quando poi (come il più spesso avviene) è necessario che le funzioni che si considerano in un dato intervallo siano finite e continue insieme a alcune delle loro derivate in tutti i punti di questo intervallo, ad eccezione tutt'al più di un numero finito di punti dell'intervallo medesimo, allora non si potranno considerare che alcune fra quelle funzioni cui si riferisce il teorema del §. 162, per le quali in ogni porzione dell'intervallo dato esistono sempre altre porzioni ove la funzione è sempre crescente o sempre decrescente, ec., per modo che gli infiniti massimi e minimi, se pure esistono, non si trovino che in intorni di un numero finito o infinito di punti discreti dell'intervallo dato.

E quando, particolarizzando ancor più la natura della fun-

zione $f(x)$ che si considera in un dato intervallo (a, b), si richieda che ad essa sia applicabile lo sviluppo di Taylor attorno a ogni punto x_0 di questo intervallo, allora le considerazioni precedenti portano facilmente anche a concludere che gli infiniti massimi e minimi devono essere esclusi assolutamente in tutto l'intervallo sì nella funzione $f(x)$ che in una qualunque delle sue derivate, per quanto il numero di questi massimi e minimi, pur restando sempre finito, possa anche andare crescendo oltre ogni limite al crescere sempre più dell'ordine di derivazione; o anche, il che tornerà lo stesso, gli infiniti massimi e minimi devono essere esclusi assolutamente da una qualunque delle infinite funzioni $f(x)—\text{P}$ (la $f(x)$ inclus.) che si ottengono da $f(x)$ togliendovi qualsiasi polinomio razionale e intero P.

Si osservi infatti che se una funzione $f(x)$, come p. es. la funzione $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \text{sen}\frac{1}{x-x_0}$, in ogni intorno p. es. a destra di un punto x_0 non ha sempre uno stesso valore ma ha un numero infinito di massimi e minimi, e nei punti di questo intorno ammette sempre una derivata ordinaria determinata $f'(x)$ che nel punto x_0 è anche continua a destra, questa derivata nel punto x_0 dovrà essere zero (§. 159), e tale dovrà essere pure in infiniti punti di ogni intorno a destra di x_0, senza però essere sempre uguale allo zero, per modo che questa derivata dovrà avere anch'essa un numero infinito di massimi e minimi in ciascuno degli stessi intorni (§. 57), e essere, come abbiamo detto, uguale a zero nel punto x_0.

Similmente dunque se la stessa funzione $f(x)$ ammette anche una derivata seconda $f''(x)$ che nel punto x_0 è continua a destra, questa derivata avrà anch'essa infiniti massimi e minimi in ogni intorno a destra di x_0, e sarà zero in x_0; e così in generale se una funzione $f(x)$ ha un numero infinito di massimi e minimi negli intorni comunque piccoli di un punto x_0, altrettanto accadrà per le derivate dei varii ordini che essa ammette; e, almeno finchè in x_0 queste derivate sono continue, esse in questo punto x_0 saranno uguali a zero; talchè in particolare si vede ora chiaramente che se una funzione $f(x)$ nei punti di un dato intervallo

avrà le sue derivate dei varii ordini sempre finite e continue, (come appunto si richiede per la sviluppabilità della stessa funzione in serie di Taylor), nè la funzione $f(x)$ nè alcuna delle sue derivate potrà avere infiniti massimi e minimi nelle vicinanze di alcun punto dello stesso intervallo, senza che lo stesso accada per le derivate degli ordini seguenti, e senza che in quel punto queste ultime derivate siano tutte uguali a zero.

Osservando dunque che, per una funzione *non razionale*, l'essere zero in un punto x_0 tutte le derivate al di là di un certo ordine (come accade p. es. per la funzione $x^2 + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x-x_0}\Big)$ esclude assolutamente la possibilità del suo sviluppo in serie di Taylor ordinata per le potenze di $x-x_0$ (cioè attorno al punto x_0), è forza evidentemente concludere come dicevamo sopra, che la sviluppabilità di una funzione $f(x)$ in serie di Taylor attorno ai singoli punti di un certo intervallo (a, b) esclude assolutamente la presenza in questo intervallo di un numero infinito di massimi e minimi sì nella funzione che nelle sue derivate dei varii ordini; e la stessa esclusione viene ad aversi necessariamente anche per le funzioni $f(x)$—P, ove P è un polinomio razionale e intero qualunque, poichè ove una di queste funzioni negli intorni di un punto x_0 avesse un numero infinito di massimi e minimi, siccome le sue derivate a partire da quelle di un certo ordine coincidono colle derivate di $f(x)$, a partire almeno dallo stesso ordine quest'ultime derivate sarebbero tutte zero nel punto x_0.

In particolare poi, dietro quanto abbiamo detto, si può anche asserire che, se α è una quantità fissa qualsiasi, la rappresentabilità di una funzione $f(x)$ in serie ordinata per le potenze di $x-\alpha$ per tutti i valori di x fra a e b (a e b inclusi o no) esclude assolutamente la presenza di un numero infinito di massimi e minimi tanto per la funzione che per le varie sue derivate in qualunque porzione (a', b') dell'intervallo (a, b) che non termini ai punti a e b, giacchè, come è noto, una tal funzione $f(x)$ è sempre sviluppabile in serie di Taylor attorno a ogni punto x_0 dell'intervallo (a', b'), ec. . . .

Vedremo poi, nel capitolo seguente, che le restrizioni che

quì si hanno rispetto alla applicabilità del calcolo differenziale alle funzioni che hanno un numero infinito di massimi e minimi, e rispetto alle loro derivate, si riducono di gran lunga minori quando si tratta invece di applicare loro il calcolo integrale; per modo che, non ostante ciò che sopra abbiamo detto, la considerazione di queste funzioni non è da escludersi del tutto dagli studî analitici.

177. Poichè le considerazioni del paragrafo precedente ci avvertono dell'esistenza di funzioni, come la $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x-x_0}$, che in tutto un intervallo hanno le loro derivate finite e continue, mentre in un punto x_0 dello stesso intervallo queste derivate sono sempre uguali allo zero; e tanto più poi inquantochè si riscontra che di tali funzioni se ne hanno anche alcune, come p. es. la funzione $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$, che in vicinanza di x_0 non hanno neppure un numero infinito di massimi e minimi, non troviamo fuor di luogo, di presentare anche la osservazione seguente.

Osserviamo cioè che data una funzione $\varphi(x)$ le cui derivate dei varii ordini sono finite e continue nei punti di un dato intervallo (a, b) al quale appartiene il punto x_0, la serie di Taylor:

$$\varphi(x_0) + \frac{x-x_0}{1}\varphi'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1\,.\,2}\varphi''(x_0) + \ldots\ldots$$

bene spesso sarà convergente in tutto un intervallo $(x_0-\rho,\ x+\rho)$, e rappresenterà una funzione finita e continua insieme alle sue derivate in tutti i punti di questo intervallo (gli estremi al più escl.); ma questa funzione $\psi(x)$, sebbene nel punto x_0 abbia lo stesso valore e le stesse derivate della funzione data $\varphi(x)$, potrà differire da $\varphi(x)$ in tutti gli altri punti delle porzioni comuni dei due intervalli (a, b) e $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$; la differenza essendo una funzione che nel punto x_0 sia zero insieme alle sue derivate dei varii ordini.

Ciò equivale a dire che quando una funzione di una variabile reale è finita e continua in tutti i punti di un dato intervallo insieme alle sue derivate dei varii ordini, non sempre può dirsi

(come pure bene spesso si è affermato fin quì) che i valori di essa e delle sue derivate in un punto caratterizzino completamente la funzione in tutto l'intervallo dato; e neppure questa funzione può dirsi caratterizzata dai valori che essa prende in una porzione determinata e comunque piccola (a_1, b_1) dello stesso intervallo, poichè questi valori, sebbene servano al calcolo delle derivate nei punti estremi a_1 o b_1, non possono determinare la funzione neppure in intorni comunque piccoli di questi punti a_1 e b_1 presi esternamente all'intervallo (a_1, b_1); e ciò a meno, s'intende, che non sia posta come condizione anche la sviluppabilità di $f(x)$ in serie di Taylor attorno a ogni punto x_0 di (a, b), o a meno che non siano date altre proprietà speciali di $f(x)$; talchè evidentemente, finchè si resta nel caso di funzioni *di variabili reali,* la classazione proposta da Hankel (*) di queste funzioni in funzioni legittime e funzioni illegittime non può essere pienamente accettata.

Integrali definiti.

178. Nei trattati di calcolo differenziale e integrale l'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ fra due limiti reali α e β per le funzioni reali e finite $f(x)$ si definisce ordinariamente dicendo che esso non è altro che la quantità $f_1(\beta)-f_1(\alpha)$, ove $f_1(\beta)$ e $f_1(\alpha)$ sono i valori per $x=\beta$ e $x=\alpha$ di una funzione finita e continua $f_1(x)$ legata a $f(x)$ dalla relazione $\frac{df_1(x)}{dx}=f(x)$. Con questa definizione però la dimostrazione che si dà ordinariamente della esistenza dell'integrale di una funzione $f(x)$, anche limitata alle sole funzioni continue, non può dirsi rigorosa perchè fondata sulla esistenza di una curva rappresentativa della funzione stessa $f(x)$; e d'altro lato poi, lasciando anche da parte le questioni sull'esistenza o nò dell'integrale, la stessa definizione non somministra un mezzo generale per trovarlo effettivamente, poichè ne fà dipendere la ricerca da operazioni da

(*) Hankel. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen pag. 42.

farsi su una funzione del tutto ignota; quindi conviene andare in traccia di una definizione meglio appropriata per uno studio generale delle funzioni.

La nuova definizione, di cui la esplicita introduzione nella scienza devesi propriamente a *Cauchy*, a *Dirichlet*, e a *Riemann* si ha in una delle antiche proprietà degli integrali definiti; e mentre, in casi anche ben più generali di quelli che ordinariamente si considerano nei trattati, essa ci riporta poi all'antica definizione, dandocela come proprietà degli integrali stessi, ha su questa ultima il vantaggio di mostrare sotto quali condizioni generali l'integrale ha un significato preciso e determinato, e di farne dipendere la ricerca da operazioni su quella funzione stessa alla quale l'integrazione deve applicarsi.

Noi daremo quì la nuova definizione; ma prima, ritenendo per un momento l'antica, ricorderemo la proprietà e le osservazioni che alla definizione stessa danno luogo.

179. Sia perciò $f(x)$ una funzione che nell'intervallo finito da α a β è finita e continua, ed è derivata di una funzione $F(x)$ che nello stesso intervallo è dotata delle medesime proprietà.

Supponendo p. es. $\alpha<\beta$, e indicando con $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ $n-1$ valori di x in ordine di grandezza crescente fra α e β, e con $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ le differenze $x_1-\alpha$, x_2-x_1, $x_3-x_2, \ldots, \beta-x_{n-1}$, si avrà (§. 72, 6.°).

$$F(x_1)=F(\alpha)+\delta_1 f(\alpha+\varepsilon_1\delta_1),$$
$$F(x_2)=F(x_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2),$$
$$F(x_3)=F(x_2)+\delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(\beta)=F(x_{n-1})+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n),$$

e quindi sarà:

$$F(\beta)-F(\alpha)=\sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_n\delta_s),$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sono numeri positivi compresi fra 0 e 1, il cui valore dipende dalla natura della funzione $F(x)$ o $f(x)$ e dai valori presi per $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

La somma $\sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s)$, ove le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sono prese nel modo che abbiamo detto, dipendentemente cioè dalla natura della funzione $f(x)$ e dai valori presi per le $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, ha dunque un valore determinato e finito $F(\beta)-F(\alpha)$, qualunque siano le quantità $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ e qualunque sia il loro numero; quindi poichè, secondo l'antica definizione, $F(\beta)-F(\alpha)$ è l'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, si conclude che esso è anche il limite della somma $\sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s)$, quando le δ_s diventano minori di qualunque quantità data, le ε_s restando sempre numeri *determinati* compresi fra 0 e 1, dipendenti dalla natura della funzione $f(x)$, e dagli estremi x_{s-1}, x_s degli intervalli δ_s.

Valendosi dunque di questa proprietà, l'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, per una funzione finita e continua $f(x)$ che fra α e β è la derivata di un'altra pur finita e continua $F(x)$, potrebbe anche definirsi col dire che esso è il limite della somma dei prodotti degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ in cui si divide l'intervallo (α, β) moltiplicati respettivamente pel valore della funzione $f(x)$ corrispondente a un valore *determinato* di x nel medesimo intervallo. Ma per le funzioni generali di Dirichlet, come anche per le funzioni più comuni, non si vede come possano aversi questi valori intermedii *determinati;* quindi, anche questa definizione presenterebbe inconvenienti gravissimi, e per avere una definizione più adattata converrà trasformare la proprietà precedente degli integrali $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ intesi nel senso primitivo, o valersi di altre loro proprietà.

180. Per questo osserveremo che per una funzione finita e continua $f(x)$ quale è quella che quì consideriamo, le quantità ε_s possono anche supporsi numeri *qualunque* fra 0 e 1, e quindi l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ può anche essere considerato come il limite

della somma dei prodotti degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ nei quali si divide l'intervallo totale (α, β) moltiplicati respettivamente per un valore della funzione $f(x)$ corrispondente a un valore *qualunque* di x nel medesimo intervallo.

Continuiamo infatti a indicare con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ i numeri determinati che colla divisione dell'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ conducono al valore $F(\beta)-F(\alpha)$ dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, e indichiamo con $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ dei valori qualunque di x negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ respettivamente.

Si avrà:

$$\sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) - \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s) = \sum_1^n \delta_s \left\{ f(\zeta_s) - f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s) \right\};$$

e quindi, osservando che, a causa della continuità di $f(x)$ in tutto l'intervallo (α, β), per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ si può trovare (§. 42) un numero d tale che in ogni intervallo inferiore a d le oscillazioni della funzione siano inferiori a σ, si concluderà subito che quando le δ_s saranno già ridotte tutte inferiori a d, si avrà sempre in valore assoluto:

$$\sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) - \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s) < \sigma \sum_1^n \delta_s,$$

ovvero:

$$\sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) - \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s) < \sigma(\beta-\alpha),$$

e quindi sarà:

$$\lim \sum_1^n \delta_s f(\zeta_s) = \lim \sum_1^n \delta_s f(x_{s-1}+\varepsilon_s\delta_s) = \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

come appunto avevamo enunciato.

181. Questo risultato è quello di cui ci si vale ora per la definizione degli integrali definiti per tutte le funzioni $f(x)$; poichè, qualunque sia la funzione $f(x)$ fra α e β, purchè sempre

finita, l'integrale definito $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ si considera ora come il limite della somma $\sum_{1}^{n} \delta_s f_s$ dei prodotti $\delta_s f_s$ degli intervalli $\delta_s (s=1, 2, .., n)$, in cui si suppone diviso l'intervallo totale (α, β), moltiplicati respettivamente per un valore qualunque f_s della funzione negli intervalli stessi δ_s, o più generalmente per uno qualunque dei numeri f_s compresi fra il limite superiore e il limite inferiore di $f(x)$ negli stessi intervalli δ_s (questi limiti inclusi).

Però onde l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)d(x)$ così definito abbia un significato, e quindi la funzione $f(x)$ possa dirsi effettivamente *atta alla integrazione definita fra* α e β, bisognerà che la funzione stessa $f(x)$ sia tale che il limite della somma $\sum_{1}^{n} \delta_s f_s$, che evidentemente non può essere infinito, abbia un valore determinato indipendente dai valori f_s che si prendono nei differenti intervalli, e indipendente dalla legge secondo la quale sono presi questi intervalli; quindi noi dobbiamo prima di tutto cercare le condizioni necessarie e sufficienti perchè questo accada.

182. Sia perciò $f(x)$ una funzione di x sempre finita fra α e β, e supponiamo dapprima che si sappia che essa è atta alla integrazione definita fra α e β.

Allora, se si fà una divisione dell'intervallo (α, β) negli intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, indicando in generale con f_s un valore qualunque di $f(x)$ nell'intervallo δ_s, o un numero compreso fra il limite superiore e il limite inferiore di $f(x)$ nello stesso intervallo (questi limiti superiori e inferiori inclusi), e considerando la somma $\sum_{1}^{n} \delta_s f_s$, si può dire che questa somma ha un limite determinato e finito indipendente dalla legge secondo la quale è stata fatta la divisione dell'intervallo dato negli intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, e indipendente dal valore f_s scelto in questi intervalli; per modo che se L_s e l_s sono i limiti superiori e inferiori di $f(x)$ nell'intervallo δ_s, sarà:

$$\lim \sum_1^n \delta_s f_s = \lim \sum_1^n \delta_s L_s = \lim \sum_1^n \delta_s l_s = \text{quant. det. e fin.},$$

e quindi, qualunque sia il sistema di divisione adottato per gli intervalli δ_s, si avrà:

$$\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0,$$

essendo D_s la oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo δ_s; e questo mostra intanto che onde la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione definita fra α e β, è necessario che la somma $\sum_1^n \delta_s D_s$ dei prodotti $\delta_s D_s$ degli intervalli δ_s nei quali si divide l'intervallo totale (α, β) moltiplicati ciascuno per le respettive oscillazioni della funzione negli stessi intervalli tenda a zero coll'impiccolire di questi intervalli, qualunque sia la legge secondo la quale la divisione dell'intervallo totale è stata fatta.

183. Supponiamo ora reciprocamente che per una data funzione $f(x)$ questa condizione sia soddisfatta per ogni divisione dell'intervallo, e cerchiamo se allora la funzione stessa $f(x)$ sia sempre atta o nò alla integrazione.

Immaginiamo perciò al solito eseguita una divisione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, .., \delta_n$, e consideriamo dapprima le due somme $\sum_1^n \delta_s f_s$, $\sum_1^n \delta_s f'_s$ corrispondenti a due sistemi qualunque di valori f_s, f'_s compresi fra i limiti inferiori e superiori dei valori di $f(x)$ negli stessi intervalli δ_s. Si avrà evidentemente in valore assoluto:

$$\sum_1^n \delta_s f_s - \sum_1^n \delta_s f'_s \leq \sum_1^n \delta_s D_s;$$

e perciò se la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ per la divisione che è stata fatta dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, .., \delta_n$ avrà un limite determinato, questo limite sarà indipendente dai valori f_s che si sceglieranno negli intervalli δ_s.

Immaginiamo ora eseguita un altra divisione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'}$; e, oltre alla somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ corrispondente alla divisione $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, consideriamo anche l'altra $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s$ corrispondente alla nuova divisione $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$.

Indichiamo perciò con $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ i valori di x in ordine di grandezza crescente corrispondenti ai punti di divisione dell'intervallo (α, β) negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, e con $x'_1, x'_2, \ldots x'_{n'-1}$ i valori analoghi di x per la divisione $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$; e con questi due sistemi di valori di x formiamo un terzo sistema $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ che risulti dall'insieme dei due primi, in modo cioè che una qualunque delle $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ sia una delle $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ o delle $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'-1}$; e supponiamo che queste quantità $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ siano esse pure in ordine di grandezza crescente, e siano $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ i nuovi intervalli $r_1-\alpha$, $r_2-r_1, r_3-r_2, \ldots, \beta-r_{p-1}$.

Evidentemente nell'intervallo fra due x_s consecutive x_{s-1} e x_s, potranno cadere alcune delle r o anche nessuna; e in generale possiamo dire che se $x_{s-1}=r_h$ sarà $x_s=r_{h+t}$ essendo $t \geq 1$, e $r_{h+1}, r_{h+2}, \ldots, r_{h+t-1}$ saranno le r che cadono fra x_{s-1} e x_s; talchè evidentemente sarà: $\delta_s=\rho_{h+1}+\rho_{h+2}+\ldots+\rho_{h+t}$, e potremo porre:

$$\delta_s f_s=\rho_{h+1} f''_{h+1}+\rho_{h+2} f''_{h+2}+\ldots+\rho_{h+t} f''_{h+t}+$$
$$+\rho_{h+1}(f_s-f''_{h+1})+\rho_{h+2}(f_s-f''_{h+2})+\ldots+\rho_{h+t}(f_s-f''_{h+t}),$$

ove $f''_{h+1}, f''_{h+2}, \ldots, f''_{h+t}$ sono valori scelti a piacere fra i limiti superiori e inferiori dei valori di $f(x)$ negli intervalli $\rho_{h+1}, \rho_{h+2}, \ldots, \rho_{h+t}$ respettivamente.

Ora di quì si avrà:

$$\sum_1^n \delta_s f_s=\sum_1^p \rho_h f''_h+\mathrm{P},$$

essendo P la somma delle somme:

$$\rho_{h+1}(f_s-f''_{h+1})+\rho_{h+2}(f_s-f''_{h+2})+\ldots+\rho_{h+t}(f_s-f''_{h+t}),$$

corrispondenti ai varii intervalli δ_s; quindi, poichè in ciascuna di queste somme la massima delle differenze $f_s - f''_{h+1}, f_s - f''_{h+2}, \ldots$, non può superare in valore assoluto la oscillazione D_s nell'intervallo corrispondente $\delta_s = \rho_{h+1} + \rho_{h+1} + \ldots + \rho_{h+t}$, si avrà intanto in valore assoluto:

$$(1) \qquad P \leq \sum_1^n \delta_s D_s .$$

Similmente si trova che:

$$\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s = \sum_1^p \rho_h f''_h + P',$$

ove per f''_h si possono intendere presi gli stessi valori che precedentemente, e P′ è la somma analoga alla P per gli intervalli δ'_s, per modo che in valore assoluto si ha:

$$(2) \qquad P' \leq \sum_1^{n'} \delta'_s D'_s ;$$

quindi sarà:

$$(3) \qquad \sum_1^n \delta_s f_s - \sum_1^{n'} \delta'_s f'_s = P - P',$$

ove P e P′ soddisfano alle condizioni (1) e (2), e si conclude perciò intanto che se la condizione $\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0$ è soddisfatta per tutti i sistemi di divisione $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, e se per una data divisione la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ ha un limite determinato, le somme analoghe per tutte le altre divisioni avranno ancora lo stesso limite.

Oltre a ciò poi, di quì si vede pure facilmente che se la condizione $\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0$ è soddisfatta quando la divisione degli intervalli si fà seguendo una certa legge, esiste effettivamente per la stessa divisione un limite determinato per la somma $\sum_1 \delta_s f_s$.

Quando infatti le δ_s saranno ridotte sufficientemente piccole (come p. es. quando saranno tutte divenute inferiori a una grandezza sufficientemente piccola δ) le somme corrispondenti $\sum_1^n \delta_s D_s$ saranno sempre inferiori a un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo σ; quindi, se si suppone che con un ulteriore impiccolimento, seguendo sempre la stessa legge per la divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali, le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ divengano le $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'}$ si vede subito per le (1), (2) e (3) che le differenze fra i valori successivi delle somme $\sum_1^n \delta_s f_s$ dopo che le δ_s saranno divenute abbastanza piccole si manterranno tutte inferiori a 2σ, e perciò le somme $\sum_1^n \delta_s f_s$ avranno un limite determinato (§. 22); talchè si può ora evidentemente affermare che la condizione $\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0$ di cui abbiamo parlato sopra è anche sufficiente perchè $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e β, quando sia soddisfatta per tutti i sistemi di divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$.

184. Ora è facile di vedere che se questa condizione $\lim \sum_1^n \delta_s D_s = 0$ è soddisfatta quando la divisione $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ dell'intervallo (α, β) viene fatta secondo una certa legge, essa lo è altresì per tutte le altre divisioni $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'})$ dello stesso intervallo.

Supponiamo infatti che le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ della prima divisione siano già tanto piccole che per esse si abbia $\sum_1^n \delta_s D_s < \sigma$, essendo σ un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo; e le $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_{n'}$ della seconda divisione siano già tutte inferiori a $\frac{d}{n}$, essendo d un altro numero positivo piccolo anch'esso a piacere.

Allora se colle due divisioni date si forma una sola divisione

$(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p)$ come nel paragrafo precedente, ritenendo le notazioni dello stesso paragrafo, e indicando con D''_h la oscillazione di $f(x)$ nell'intervallo ρ_h, si vede subito che si avrà:

$$\delta_s D_s \geq \rho_{h+1} D''_{h+1} + \rho_{h+2} D_{h+2} + \ldots + \rho_{h+l} D''_{h+l},$$

e perciò sarà intanto:

$$\sum_1^n \delta_s D_s \geq \sum_1^p \rho_h D''_h .$$

Ma i termini della somma $\sum_1^{n'} \delta'_s D'_s$ che non compariscono nell'altra $\sum_1^p \rho_h D''_h$ non saranno mai più di n, perchè essi potranno essere soltanto quelli corrispondenti agli intervalli δ'_s nell'interno dei quali cadono uno o più punti x_s; quindi indicando con d' il massimo degli intervalli δ'_s, e con D la massima oscillazione di $f(x)$ in questi intervalli o quella fra α e β, si avrà:

$$\sum_1^{n'} \delta'_s D'_s \leq \sum_1^p \rho_h D''_h + nd'D,$$

e perciò sarà evidentemente:

$$\sum_1^{n'} \delta_s' D'_s \leq \sum_1^n \delta_s D_s + nd'D, \tag{4}$$

ovvero:

$$\sum_1^{n'} \delta'_s D'_s < \sigma + dD;$$

e ora siccome σ e d sono arbitrariamente piccole, e questa formola sussiste sempre anche al successivo impiccolirsi delle δ'_s, si conclude subito di quì come volevamo che $\lim \sum_1^{n'} \delta'_s D'_s = 0$; e questo permette ora di enunciare il teorema seguente: *Affinchè una funzione reale $f(x)$ di una variabile reale x sia atta alla integrazione definita in un intervallo finito (α, β) nel quale essa è sempre finita, è necessario e sufficiente che si possa fare una divisione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ tali che*

la somma $\Sigma \delta_s D_s$ *dei prodotti* $\delta_s D_s$ *degli intervalli* δ_s *moltiplicati per le respettive oscillazioni della funzione negli intervalli stessi abbia per limite zero coll'impiccolire indefinitamente di questi intervalli.*

185. Siccome poi nella dimostrazione precedente per giungere alla conclusione che $\lim \sum_1^{n'} \delta_s' D_s' = 0$, basta semplicemente supporre che le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ dalle quali si parte costituiscano un sistema d'intervalli *speciali* pei quali si abbia $\sum_1^n \delta_s D_s < \sigma$, senz'altra limitazione, s' intende subito che si potrà anche modificare l'enunciato del teorema precedente col dire che: *Affinchè la solita funzione reale e finita $f(x)$ sia atta alla integrazione nell'intervallo finito* (α, β) *è necessario e sufficiente che per ogni valore positivo e arbitrariamente piccolo* σ *si possa trovare un sistema d'intervalli* speciali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *nei quali si scomponga l'intervallo totale e tali che la somma corrispondente* $\Sigma \delta_s D_s$ *sia inferiore a* σ.

186. Mostriamo ora come le condizioni di integrabilità che abbiamo trovato si possono trasformare facilmente in un altra che riesce spesso di più facile applicazione.

Supponiamo perciò dapprima che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), e che gli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ nei quali si suppone scomposto l'intervallo (α, β), siano tali che per essi la somma corrispondente $\sum_1^n \delta_s D_s$ sia inferiore a un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo σ'; e indichiamo con τ la somma degli intervalli δ_s nei quali le oscillazioni D_s della funzione sono superiori a un numero dato pur positivo e piccolo quanto si vuole σ. Si avrà:

$$\tau \sigma < \sum \delta_s D_s < \sigma',$$

e perciò sarà $\tau < \frac{\sigma'}{\sigma}$; quindi, osservando che, per quanto piccolo sia stato preso il σ, il numero $\frac{\sigma'}{\sigma}$ può sempre supporsi arbitrariamente piccolo (perchè la piccolezza di σ' è indipendente da

quella di σ), si concluderà subito che se la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione, in qualunque sistema di divisione dell'intervallo totale si giungerà sempre a trovare un sistema d'intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, tali che la somma τ di quelli fra questi intervalli nei quali si hanno oscillazioni maggiori di un numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, sia minore di un numero dato arbitrariamente piccolo e positivo ε.

Viceversa, se si sà che questa condizione è soddisfatta qualunque sia σ, o anche se si sà soltanto che per ogni valore speciale di σ e di ε esiste sempre un sistema d'intervalli *speciali* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ pei quali la somma τ ad essi corrispondente sia inferiore ad ε, si potrà affermare che la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione definita fra α e β; giacchè allora, essendo τ la somma degli intervalli δ_s nei quali si hanno oscillazioni superiori a σ, $\beta-\alpha-\tau$ sarà la somma degli intervalli nei quali le oscillazioni di $f(x)$ non sono superiori a σ, e quindi indicando con D la massima oscillazione di $f(x)$ nei varii intervalli δ_s, o la oscillazione fra α e β, si avrà evidentemente:

$$\sum_1^n \delta_s D_s \leq \tau D + (\beta-\alpha)\sigma,$$

per modo che sarà soddisfatta la condizione che vien richiesta dall'enunciato del teorema precedente onde la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e β; quindi si può anche senz'altro affermare che: *Affinchè la solita funzione reale e finita $f(x)$ sia atta all'integrazione nell'intervallo finito* (α, β), *è necessario e sufficiente che per ogni sistema di valori arbitrariamente piccoli e positivi σ e ε, si possa trovare un sistema d'intervalli* speciali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, *nei quali si scomponga l'intervallo totale* (α, β), *tali che la somma τ di quelli fra questi intervalli nei quali le oscillazioni della funzione sono maggiori di σ sia inferiore ad ε.* E non si deve lasciar di osservare che le dimostrazioni precedenti permettono anche di dire che quando si sia verificato che questa condizione è soddisfatta qualunque sia σ, allora al tendere a zero degli intervalli parziali in cui viene diviso l'intervallo totale, il numero τ avrà per limite zero; e ciò non solo per le divisioni

dell' intervallo totale (α, β) cui appartengono i sistemi speciali d'intervalli coi quali sarà stata fatta la verificazione, ma anche per qualunque altra divisione.

Questi risultati poi si applicano anche alle funzioni complesse di variabili reali, considerando però allora separatamente le due funzioni formate dalla parte reale e dal coefficiente dell'immaginario, e talvolta anche considerando soltanto la funzione formata dai moduli della funzione data stessa.

187. Da questo teorema risultano ora come casi particolari i seguenti.

1.° *Tutte le funzioni finite e continue in un intervallo finito* (α, β) *sono sempre atte alla integrazione definita in questo intervallo,* giacchè per esse (§. 42), qualunque sia il numero positivo dato e arbitrariamente piccolo σ, si può sempre scomporre lo stesso intervallo (α, β) in intervalli δ_s talmente piccoli che in ciascuno di essi la oscillazione corrispondente D_s della funzione sia sempre minore di σ.

2.° *Le funzioni finite* $f(x)$ *che fra* α *e* β *sono soltanto generalmente continue, e quelle punteggiate discontinue le cui discontinuità sono in un gruppo infinito di punti di prima specie sono atte alla integrazione definita nello stesso intervallo*. Si osservi infatti che in questo caso si potranno separare dall'intervallo (α, β) altri intervalli $\lambda_1, \lambda_2, ..$ piccoli quanto si vuole che racchiudano i varii punti di discontinuità (§. 14); e il numero di questi intervalli sarà sempre inferiore a un numero finito per le funzioni generalmente continue, mentre, sebbene sempre finito, andrà crescendo indefinitamente al successivo impiccolirsi degli intervalli stessi, per le funzioni punteggiate discontinue che quì si considerano.

Però questi intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, pur mantenendosi sempre in numero finito (§. 14), potranno sempre scegliersi in modo che la loro somma sia minore di quel numero che più ci piace ε; e poi gli intervalli rimasti $\mu_1, \mu_2, \ldots$, potranno sempre scomporsi in un numero finito di intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots$ tali che in ciascuno di essi le oscillazioni della funzione siano sempre inferiori a un numero dato arbitrariamente piccolo e positivo σ, perchè negli intervalli stessi $\mu_1, \mu_2, \ldots$ la funzione è continua; quindi

evidentemente si otterrà così una speciale scomposizione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $(\delta_1, \delta_2, \ldots \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ pei quali sarà soddisfatta la condizione contenuta nell'enunciato del teorema precedente, e perciò la funzione data sarà atta alla integrazione definita fra α e β.

In particolare sono dunque atte alla integrazione fra 0 e 1 le funzioni punteggiate discontinue 1.ª, 2.ª e 3.ª del §. 62.

3.° *Le funzioni che in un intervallo finito* (α, β) *sono sempre finite e godono della proprietà che il numero dei punti nei quali si hanno salti maggiori di un numero arbitrariamente piccolo e positivo* σ *è sempre finito e solo può crescere oltre ogni limite per l'impiccolire indefinitamente di* σ, *sono atte alla integrazione definita fra* α *e* β. Sia infatti $f(x)$ una funzione che soddisfa alle condizioni quì dette, e che sarà perciò una funzione punteggiata discontinua (§. 65); e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ i punti, in numero finito m, nei quali questa funzione fà salti superiori o uguali a $\frac{\sigma}{4}$, essendo σ un numero dato comunque piccolo e positivo. Escludendo questi punti con intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ tutti inferiori a $\frac{\varepsilon}{m}$, rimarranno alcuni intervalli in numero finito $\mu_1, \mu_2, \ldots$ in ciascun dei quali i salti della funzione saranno sempre inferiori a $\frac{\sigma}{4}$, e la somma degli intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ sarà inferiore a ε.

Ora, ripetendo quei ragionamenti stessi che si fecero ai §§. 41 e 42 per dimostrare proprietà analoghe delle funzioni continue, salvo a mutare ora naturalmente quà e là qualche parola, si dimostra anche più in generale che: *se una funzione sempre finita* $f(x)$ *nei punti di un intervallo* (a, b) *fà soltanto salti inferiori a* $\frac{\sigma}{4}$, *si può sempre trovare un numero positivo e differente da zero* δ' *tale che, per* δ *numericamente inferiore a* δ', *e per tutti i punti* x, *e* $x+\delta$ *dell'intervallo* (a, b) *si ha sempre in valore assoluto:* $f(x+\delta)-f(x)<\frac{\sigma}{2}$; e quindi *in ogni intervallo non superiore a* $2\delta'$ *le oscillazioni della funzione non sono mai maggiori*

di σ: dunque in forza di questa proprietà siamo sicuri che per la funzione che ora consideriamo, ognuno degli intervalli indicati sopra con $\mu_1, \mu_2, \ldots$ si potrà scomporre in un numero finito d'intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots$ in ciascuno dei quali le oscillazioni della funzione non saranno mai superiori a σ, e allora si otterrà una speciale scomposizione dell'intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ pei quali è soddisfatta la condizione contenuta nell'enunciato del teorema generale del §. 186; talchè anche in questo caso si può ora affermare come volevamo che la funzione data $f(x)$ sarà atta alla integrazione definita α e β.

In particolare dunque sono atte alla integrazione definita in qualunque intervallo finito tutte le funzioni punteggiate discontinue che si ottengono applicando il principio della condensazione delle singolarità (§. 114, 1.°), come potremo riconoscere per altra via anche in seguito.

4.° *Le funzioni sempre finite che in un intervallo finito* (α, β) *hanno soltanto discontinuità ordinarie, o che avendo delle discontinuità di seconda specie le hanno soltanto da una parte dei punti corrispondenti, e sempre dalla stessa parte* (*destra o sinistra*), *sono atte alla integrazione fra* α *e* β.

Sia infatti $f(x)$ una tale funzione, e supponiamo che se essa ha discontinuità di seconda specie in uno o più punti fra α e β, le abbia soltanto a destra dei punti stessi.

Supponendo $\alpha<\beta$, indichiamo con ε un numero positivo piccolo a piacere, e prendiamo a considerare l'intervallo $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$.

Siccome a sinistra di ogni punto la funzione data $f(x)$ è continua o ha tutt'al più una discontinuità ordinaria, essa sarà una funzione punteggiata discontinua (§. 151) nell'intervallo (α, β); quindi anche nell'intervallo $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ esisteranno infiniti punti nei quali la funzione stessa è continua, e se x_1 è uno di questi punti, e σ è un numero dato arbitrariamente piccolo e positivo, limitandoci a considerare la parte a destra di x_1 si potrà trovare un numero positivo ε_1 tale che per ogni punto x compreso fra x_1 e $x_1+\varepsilon_1$ ($x_1+\varepsilon_1$ al più escl.) si abbia in valore assoluto:

$$f(x)-f(x_1)<\frac{\sigma}{2}.$$

Però di questi numeri ε_1 ne esisterà evidentemente un numero infinito, poichè, se ε_1 è un numero che gode dell'indicata proprietà, ogni numero inferiore a ε_1 godrà della stessa proprietà; quindi potremo supporre che il valore scelto per ε_1 sia appunto il limite superiore dei valori che così può avere ε_1.

Posto allora $y_1=x_1+\varepsilon_1$, formeremo l'intervallo $(y_1, y_1+\frac{1}{2}\varepsilon)$, essendo ε il numero scelto sopra a piacere, e in questo intervallo prenderemo un punto x_2 a destra di y_1 nel quale la funzione sia continua, e poi anche per questo punto x_2 formeremo un intervallo $(x_2, x_2+\varepsilon_2)$ analogo all'intervallo $(x_1, x_1+\varepsilon_1)$; per modo cioè che in ogni punto x di esso ($x_2+\varepsilon_2$ al più escl.) si abbia in valore assoluto: $f(x)-f(x_2)<\frac{\sigma}{2}$, essendo al solito ε_2 il limite superiore dei valori che può avere ε_2 quando si richiede che per x compreso fra x_2 e $x_2+\varepsilon_2$ ($x_2+\varepsilon_2$ al più escl.) si abbia sempre in valore assoluto $f(x)-f(x_2)<\frac{\sigma}{2}$.

Posto poi $y_2=x_2+\varepsilon_2$, formeremo l'intervallo $(y_2, y_2+\frac{1}{2^2}\varepsilon)$, e in esso prenderemo un nuovo punto x_3 a destra di y_2 nel quale la funzione data sia continua, e poi anche per questo punto formeremo un nuovo intervallo $(x_3, x_3+\varepsilon_3)$, analogo agli intervalli precedenti $(x_1, x_1+\varepsilon_1)$, $(x_2, x_2+\varepsilon_2)$, in ogni punto x del quale ($x_3+\varepsilon_3$ al più escl.) si abbia in valore assoluto: $f(x)-f(x_3)<\frac{\sigma}{2}$.

Così continuando successivamente, verremo a formare un sistema di numeri $x_1, x_2, x_3, \ldots$ che andranno sempre crescendo; talchè o si raggiungerà il punto β dopo avere formato soltanto un numero finito di intervalli $(x_1, x_1+\varepsilon_1)$, $(x_2, x_2+\varepsilon_2)$, $(x_3, x_3+\varepsilon_3), \ldots$, o il numero dei punti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ andrà crescendo indefinitamente, e allora (§. 25) essi avranno un limite determinato uguale o inferiore a β.

Ma, ammettendo che si presentasse questo secondo caso, e che a fosse il limite (uguale o inferiore a β) degli infiniti valori che allora verrebbero ad avere $x_1, x_2, x_3, \ldots$, ne avverrebbe che

in ogni intervallo a sinistra di a, per quanto piccolo esso fosse, vi cadrebbero un numero infinito di questi punti; e siccome, la funzione $f(x)$ nel punto a a sinistra è continua o ha tutt'al più una discontinuità ordinaria, e quindi si può sempre determinare (§. 22) un intervallo $(a-\omega, a)$ a sinistra di a tale che per ogni sistema di punti ξ, η presi in esso (a al più escl.) si abbia sempre in valore assoluto $f(\xi)-f(\eta)<\frac{\sigma}{2}$, così anche in questo intervallo $(a-\omega, a)$ dovrebbero esistere infiniti punti $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Ma se x_m fosse uno di questi punti, per ogni punto x dell'intervallo $(a-\omega, a)$ (a al più escl.) si avrebbe in valore assoluto $f(x)-f(x_m)<\frac{\sigma}{2}$; e quindi evidentemente, pel modo con cui le ε_1, $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ sono state determinate, l'estremo $x_m+\varepsilon_m$ dell'intervallo $(x_m, x+\varepsilon_m)$ corrispondente a x_m non potrebbe cadere nell'interno dell'intervallo $(a-\omega, a)$ ma tutt'al più verrebbe a cadere in a, e allora il punto successivo x_{m+1} cadrebbe fuori dell'intervallo $(a-\omega, a)$, ciò che è contraddittorio; dunque evidentemente bisogna necessariamente ammettere, che dopo di avere formato soltanto un numero finito d'intervalli $(x_1, x_1+\varepsilon_1)$, $(x_2, x_2+\varepsilon_2)$, $(x_3, x_3+\varepsilon_3)\ldots$ si raggiunga il punto β.

Ciò ammesso, si prendano ora dei punti $y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$ a sinistra di $x_1+\varepsilon_1$, $x_2+\varepsilon_2$, $x_3+\varepsilon_3, \ldots$ nell'*interno* dei respettivi intervalli $(x_1, x_1+\varepsilon_1)$, $(x_2, x_2+\varepsilon_2)$, $(x_3, x+\varepsilon_3)\ldots$, e a distanze da $x_1+\varepsilon_1$, x_2+x_2, $x_3+\varepsilon_3, \ldots$ respettivamente inferiori a $\frac{1}{2}\varepsilon$, $\frac{1}{2^2}\varepsilon$, $\frac{1}{2^2}\varepsilon, \ldots$, ove ε è il solito numero scelto a piacere in principio; e si consideri poi quella scomposizione dell'intervallo totale (α, β) che corrisponde ai successivi punti di divisione $(\alpha, x_1, y'_1, x_2, y'_2, x_3, \ldots)$.

Si vedrà subito che questa scomposizione darà luogo a un numero finito d'intervalli (α, x_1), (x_1, y'_1), (y'_1, x_2), $(x_2, y'_2)\ldots$, e le oscillazioni maggiori di σ non potranno aversi che negli intervalli (α, x_1), (y'_1, x_2), (y'_2, x_3), $y'_3, x_4)\ldots$ che sono respettivamente inferiori a ε, ε, $\frac{1}{2}\varepsilon$, $\frac{1}{2^2}\varepsilon, \ldots$, per modo che la loro

somma sarà inferiore a 3ε; quindi, poichè ragionamenti del tutto simili potrebbero farsi anche nel caso che la funzione data $f(x)$ avendo delle discontinuità di seconda specie, le avesse soltanto a sinistra dei punti corrispondenti, pel teorema generale del §. 186 si può ora senz'altro concludere, come volevamo, che la funzione quì considerata $f(x)$ è atta alla integrazione definita fra α e β.

5.° Il teorema dimostrato poi può anche generalizzarsi ed estendersi al caso *in cui la funzione data soddisfi alle condizioni contenute nel teorema stesso per tutti i punti dell'intervallo* (α, β) *ad eccezione di un gruppo di punti di prima specie.* In questo caso infatti racchiudendo questi punti in un numero finito d'intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ la cui somma può supporsi minore di quel numero che più ci piace ε', rimarranno altri intervalli in numero finito $\mu_1, \mu_2, \ldots$ in ciascuno dei quali saranno sempre soddisfatte le condizioni del teorema precedente e che potranno in conseguenza scomporsi in intervalli parziali tali che la somma degli intervalli nei quali si hanno oscillazioni maggiori di σ sia inferiore a quel numero che più ci piace ε''; quindi evidentemente resteranno ancora soddisfatte le condizioni del teorema generale del §. 186, e la funzione data sarà ancora atta alla integrazione fra α e β.

6.° Dal teorema 4.° poi si ha subito come caso particolare che: *Le funzioni che in un intervallo finito* (α, β) *sono sempre finite e non fanno mai oscillazioni o ne fanno soltanto un numero finito, sono atte alla integrazione definita fra* α *e* β, giacchè evidentemente l'intervallo totale si spezzerà in un numero finito d'intervalli in ciascuno dei quali queste funzioni non fanno oscillazioni, e quindi pel teorema del §. 25 a sinistra e a destra di ogni punto fra α e β, esse saranno sempre continue o avranno soltanto discontinuità ordinarie.

7.° *Le funzioni che nell'intervallo* (α, β) *sono totalmente discontinue non sono atte alla integrazione definita nello stesso intervallo,* giacchè in questo caso in ogni intervallo piccolo quanto si vuole preso nell'intervallo stesso o in alcune sue porzioni determinate, i salti della funzione e quindi anche le sue oscillazioni sono sempre maggiori di un certo numero sufficientemente piccolo ma

determinato σ (§. 64), ed è quindi impossibile di soddisfare alla condizione contenuta nel teorema generale del §. 186.

188. Non tralascierò poi di notare che in forza di quest'ultima osservazione si può anche asserire che *quando una funzione $f(x)$ è atta alla integrazione definita in un intervallo (α, β), essa deve essere continua almeno generalmente, o essere una funzione punteggiata discontinua fra α e β, e quindi deve essere sempre continua almeno in alcuni punti di qualsiasi porzione anche ristrettissima dell'intervallo* (α, β).

Per quanto poi *Hankel* abbia creduto di dimostrare inversamente che ogni funzione punteggiata discontinua fra α e β è sempre atta alla integrazione definita nell'intervallo (α, β), non credo che ciò possa assicurarsi perchè la dimostrazione di Hankel non mi sembra del tutto rigorosa; e d'altro lato poi, all'infuori di questa dimostrazione, io non conosco, rispetto alle funzioni punteggiate discontinue atte alla integrazione, nessun altro teorema più generale di quelli enunciati nel paragrafo precedente.

Questi teoremi però hanno già una estensione grandissima, e mettono in piena luce la immensa differenza che, dal lato della possibilità, esiste fra le due operazioni di derivazione e d'integrazione; inquantochè mentre, come abbiamo visto nei capitoli precedenti, la derivazione è bene spesso impossibile anche quando si applichi soltanto alle funzioni sempre continue in un dato intervallo (α, β), l'integrazione invece non solo è possibile per tutte le funzioni continue, ma è possibile anche per infinite classi di funzioni che in qualunque porzione anche ristrettissima dell'intervallo dato sono infinite volte discontinue.

189. Diamo ora alcuni esempi di integrali definiti calcolati dietro la definizione che ne abbiamo data nei paragrafi precedenti.

1.° Si prenda la funzione $f(x)=x^k$, ove k è un numero fisso; e poichè questa funzione è evidentemente atta alla integrazione definita fra due numeri qualunque positivi, si cerchi l'integrale $\int_\alpha^\beta x^k dx$, ove $0<\alpha<\beta$.

Si decomponga perciò l'intervallo (α, β) in n intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ coll'inserire fra α e β $n-1$ medii geometrici.

Chiamando q la ragione della progressione geometrica corrispondente, si avrà $q=\sqrt[n]{\frac{\beta}{\alpha}}$, e gli intervalli parziali δ_s saranno dati dalla formola $\delta_s=\alpha q^s-\alpha q^{s-1}=\alpha q^{s-1}(q-1)$; talchè, prendendo pel valore f_s della funzione nell'intervallo δ_s il valore $\alpha^k q^{(s-1)k}$ corrispondente all'estremo inferiore, si avrà:

$$(5)\quad \int_\alpha^\beta x^k dx=\lim_{n=\infty}\sum_1^n \alpha^{k+1} q^{(s-1)(k+1)}(q-1)=$$

$$=\lim_{n=\infty}\alpha^{k+1}(q-1)\left\{1+q^{k+1}+q^{2(k+1)}+\ldots+q^{(n-1)(k+1)}\right\},$$

e per k differente da -1 si otterrà di quì:

$$\int_\alpha^\beta x^k dx=\lim_{n=\infty}\alpha^{k+1}(q-1)\frac{q^{n(k+1)}-1}{q^{k+1}-1}=(\beta^{k+1}-\alpha^{k+1})\lim_{q=1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1}.$$

Ma, ponendo $q=1+\varepsilon$, si vede subito di quì che:

$$\lim_{q=1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1}=\lim_{\varepsilon=0}\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{k+1}-1}=\frac{1}{k+1};$$

quindi si conclude che per k differente da -1 sarà:

$$\int_\alpha^\beta x^k dx=\frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{k+1}.$$

Se poi $k=1$ la formola (5) ci dà:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}=\lim_{n=\infty}n\left\{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\}=\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

2.° Prendiamo ora la funzione $\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$ che quando α è reale e differente da uno in valore assoluto è finita e continua rispetto ad x in qualunque intervallo finito; e proponiamoci di calcolare l'integrale $\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$.

Dividiamo perciò l'intervallo da 0 a π in n intervalli uguali a $\frac{\pi}{n}$, e applichiamo il processo precedente, prendendo ancora pel

valore f_s nell'intervallo δ_s quello corrispondente all'estremo inferiore, cioè $\log(1-2\alpha\cos(s-1)\frac{\pi}{n}+\alpha^2)$. Si avrà:

$$\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\lim\frac{\pi}{n}\log(1-\alpha)^2+$$

$$+\lim\left[\frac{\pi}{n}\log\left\{(1-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+\alpha^2)(1-2\alpha\cos2\frac{\pi}{n}+\alpha^2)\ldots(1-2\alpha\cos(n-1)\frac{\pi}{n}+\alpha^2\right\}\right],$$

e poichè il primo termine del secondo membro ha per limite zero, basterà occuparsi del secondo termine.

Ma, osservando che la equazione $y^{2n}-1=0$ ha due radici reali -1 e 1, e le altre coniugate due a due, come le $e^{\frac{k\pi i}{n}}$, $e^{-\frac{k\pi i}{n}}$, con $k=1, 2, 3, \ldots (n-1)$, e si ha:

$$\left(\alpha-e^{\frac{k\pi i}{n}}\right)\left(\alpha-e^{-\frac{k\ i}{n}}\right)=1-2\alpha\cos\frac{\pi}{n}+\alpha^2,$$

si vede subito che il prodotto di cui si deve prendere il logaritmo nella formola precedente è uguale a $\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}$, e si ha perciò:

$$\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\lim\frac{\pi}{n}\log\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1},$$

e quindi se $\alpha^2<1$, sarà:

$$\int_0^\alpha \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=0,$$

e se $\alpha^2>1$ sarà invece:

$$\int_0^\pi \log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\pi\log\alpha^2=2\pi\log\alpha.$$

Se poi fosse $\alpha=\pm1$, il metodo precedente non ci direbbe più nulla; però allora la funzione sotto il segno integrale diviene infinita per $x=0$ o per $x=\pi$, e noi per ora ci limitiamo a considerare integrali di funzioni che in tutto l'intervallo d'integrazione si mantengono sempre finite.

3.° Consideriamo le tre funzioni punteggiate discontinue date

al §. 62, che come si disse al §. 187, 2.° sono atte alla integrazione definita in qualunque intervallo fra 0 e 1.

Per queste funzioni eseguendo la divisione dell'intervallo che si considera, col formare prima un numero finito d'intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ che racchiudano i varii punti di discontinuità, e poi dividendo gli intervalli restanti $\mu_1, \mu_2, \ldots$ in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots$ come si disse in generale al §. 187, 2.°, si troverà subito che per la prima e per la terza delle stesse funzioni si ha sempre:

$$\int_0^x f(x)dx = x\,,$$

per $x<1$; e per la seconda si ha:

$$\int_0^x f(x)dx = \frac{2}{3.4^m} + \left(-x\frac{1}{2^m}\right)\frac{1}{2^{m-1}} = \frac{x}{2^{m-1}} - \frac{1}{3.4^{m-1}}\,,$$

ove m può prendere i valori 1, 2, 3, ..., e x si suppone compreso fra $\frac{1}{2^m}$ e $\frac{1}{2^{m-1}}$ (questi estremi incl.); talchè in particolare facendo $m=1$, $x=1$, sempre per la stessa funzione, si ha:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}\,.$$

190. Diamo ora le proprietà principali degli integrali definiti $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, ove $f(x)$ è una funzione che nell'intervallo finito (α, β) è sempre finita e atta alla integrazione, deducendole dalla definizione che abbiamo data per essi.

1.° Osservando che quando si ha $\beta<\alpha$ gli intervalli δ_s nei quali si deve dividere l'intervallo totale (α, β) per calcolare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ devono considerarsi come negativi, si vede subito che si ha:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx\,.$$

2.° Se γ è un numero compreso fra α e β, osservando che la divisione dell'intervallo (α, β) in intervalli parziali δ_s può farsi in modo che un punto di divisione venga sempre a cadere in γ, si trova subito che:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx\,;$$

e siccome di qui si ha:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx\,,$$

e γ si suppone compreso fra α e β, la formola precedente potrà dirsi dimostrata anche pel caso che γ sia esterno all'intervallo (α, β), purchè allora la funzione $f(x)$ sia data, o almeno sia continuata con una funzione atta alla integrazione, anche nell'intervallo esterno all'intervallo primitivo (α, β).

3.° Se $f(x)=1$, si ha:

$$\int_\alpha^\beta dx = \lim \sum \delta_s = \beta - \alpha = \text{ all'intervallo}.$$

" 4.° Se le funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ sono finite e atte
" alla integrazione fra α e β e sono in numero finito, evidente-
" mente anche la loro somma algebrica $f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x)$
" sarà finita e atta alla integrazione fra α e β, e si avrà:

$$\int_\alpha^\beta \{f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x)\} dx = \int_\alpha^\beta f_1(x)dx \pm \int_\alpha^\beta f_2(x)dx \pm \ldots \pm \pm \int_\alpha^\beta f_m(x)dx\,.$$

" Similmente se c è una costante, e $f(x)$ è una funzione finita
" e atta alla integrazione fra α e β, si avrà:

$$\int_\alpha^\beta cf(x)dx = c\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\,.$$

" 5.° Se le funzioni finite $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ sono in numero

" finito e sono atte alla integrazione definita fra α e β, altrettanto " accadrà del loro prodotto $f_1(x)f_2(x)\dots f_m(x)$ ".

Supponiamo infatti dapprima che si tratti di due sole funzioni $f_1(x)f_2(x)$, e indichiamo con D la oscillazione del prodotto $f_1(x)f_2(x)$, con D_1, D_2 quelle delle funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ nell'intervallo δ_s, e con L_1, L_2 i limiti superiori e l_1, l_2 i limiti inferiori dei valori di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ nel medesimo intervallo. Supponendo per semplicità che questi limiti siano tutti positivi, si trova subito che:

$$D \leq L_1 L_2 - l_1 l_2,$$

e perciò anche:

$$D \leq L_1(L_2 - l_2) + l_2(L_1 - l_1), \quad \text{ovvero:} \quad D \leq L_1 D_2 + l_2 D_1;$$

donde si vede appunto che se le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ saranno sempre positive e per esse saranno soddisfatte le condizioni d'integrabilità, altrettanto accadrà pel prodotto $f_1(x)f_2(x)$.

Quando poi le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ non siano sempre positive nell' intervallo (α, β), esse si ridurranno tali coll'aggiungere loro delle costanti convenienti; e allora il prodotto $\varphi(x)\psi(x)$ corrispondente alle nuove funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sarà atto alla integrazione fra α e β, e quindi evidentemente altrettanto accadrà anche in questo caso pel prodotto $f_1(x)f_2(x)$; talchè, osservando ora che dal caso del prodotto di due funzioni si passa successivamente al caso del prodotto di tre di quattro funzioni ec...., il teorema enunciato sopra può dirsi evidentemente dimostrato.

E si può notare che dalla dimostrazione fatta apparisce anche che quando p. es. $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni finite e atte alla integrazione fra α e β, e δ_1, δ_2, ... δ_n sono i soliti intervalli in cui si scompone l' intervallo totale (α, β), si ha anche:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \lim \sum \delta_s f_s \varphi_s,$$

essendo f_s e φ_s valori qualunque presi ambedue a piacere fra i limiti inferiori e superiori di $f(x)$ e $\varphi(x)$ respettivamente nell' intervallo δ_s.

6.° Similmente: " il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ di due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$

« sempre finite e atte alla integrazione in un intervallo finito « (α, β) sarà atto esso pure alla integrazione nello stesso inter- « vallo tutte le volte che fra α e β la funzione denominatore $\varphi(x)$ « si manterrà sempre numericamente discosta da zero più di una « quantità determinata λ ».

Supponiamo infatti dapprima che la funzione $f(x)$ sia sempre positiva fra α e β, e indichiamo con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Siccome le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ fra α e β sono atte alla integrazione, l'intervallo (α, β) potrà scomporsi in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ tali che la somma τ di quelli intervalli (se pure ve ne sono) nei quali le oscillazioni di $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono superiori a σ sia minore di quella quantità che più ci piace ε.

In ciascuno degli altri intervalli δ_s la funzione $\varphi(x)$, almeno quando σ (come possiamo sempre supporre) è stato preso inferiore a λ, avrà sempre lo stesso segno, potendo però questo segno variare da un intervallo ad un altro; quindi se D, D_1, D_2 sono le oscillazioni respettive delle funzioni $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, $f(x)$ e $\varphi(x)$ nell'intervallo δ_s, e l_1 e l_2 sono i limiti inferiori e L_1 e L_2 i limiti superiori di $f(x)$ e $\varphi(x)$ nello stesso intervallo, quando l_2 e L_2 sono positivi si avrà:

$$D \leq \frac{L_1}{l_2} - \frac{l_1}{L_2}, \quad \text{ovvero:} \quad D \leq \frac{L_1 D_2 + l_2 D_1}{l_2 L_2},$$

o anche:

$$D \leq \frac{L_1 + l_2}{\lambda^2}\sigma,$$

e quando l_2 e L_2 sono negativi si avrà invece:

$$D \leq \frac{l_1}{l_2} - \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{ovvero:} \quad D \leq \frac{l_1 - l_2}{\lambda^2}\sigma,$$

talchè se σ è preso abbastanza piccolo, gli intervalli δ_s nei quali la funzione $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ farà oscillazioni maggiori di un numero arbitrariamente piccolo σ' potranno essere soltanto tutti o alcuni di quelli nei quali le funzioni $f(x)$ o $\varphi(x)$ fanno oscillazioni mag-

giori di σ; quindi poichè, come abbiamo detto, la somma τ di questi intervalli può supporsi minore di quel numero che più ci piace ε, resta intanto dimostrato che quando sono soddisfatte le condizioni poste sopra, e $f(x)$ è sempre positivo fra α e β, il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sarà atto alla integrazione fra α e β.

Osservando poi che il quoziente $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ può anche considerarsi come il prodotto delle due funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{\varphi(x)}$, e queste, per le ipotesi fatte, e per quanto ora abbiamo dimostrato, sono ambedue atte alla integrazione fra α e β, si conclude che anche se $f(x)$ non è sempre positiva fra α e β, il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è atto alla integrazione nell'intervallo (α, β), e con ciò il teorema enunciato sopra resta ora completamente dimostrato.

È superfluo poi di osservare che le inverse delle proprietà 4.ª 5.ª e 6.ª possono benissimo in certi casi non sussistere affatto.

7.° Si osservi ora che se $f(x)$ è al solito una funzione finita e atta alla integrazione fra α e β $(\alpha<\beta)$, e se $(\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n)$, $(\delta'_1, \delta'_2, \dots \delta'_n)$ sono due sistemi qualunque di intervalli parziali in cui viene diviso l'intervallo totale (α, β), per le formole del §. 183 si avrà in valore assoluto:

$$\sum_1^{n'}\delta'_s f'_s-\sum_1^{n}\delta_s f_s\leq\sum_1^{n}\delta_s \mathrm{D}_s+\sum_1^{n'}\delta'_s \mathrm{D}'_s,$$

e quindi servendosi della formola (4) del §. 184 si troverà anche:

$$\sum_1^{n'}\delta'_s f'_s-\sum_1^{n}\delta_s f_s\leq 2\sum_1^{n}\delta_s \mathrm{D}_s+nd'\mathrm{D},$$

ove D è l'oscillazione di $f(x)$ fra α e β, e d' è il massimo degli intervalli δ'_s; talchè, considerando ora n come fisso, e osservando che col successivo impiccolire delle δ'_s la somma $\sum_1^{n'}\delta'_s f'_s$ finisce per differire tanto poco quanto si vuole dal valore dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, e il d' può rendersi piccolo a piacere, si intende subito

che in valore assoluto sarà sempre:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_1^n \delta_s f_s \leq 2\sum_1^n \delta_s D_s,$$

ciò che permette evidentemente di dire che: " per ogni sistema di " valori speciali delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ la somma corrispondente " $\sum_1^n \delta_s f_s$ darà sempre un valore approssimato dell' integrale " $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ con un errore per eccesso o per difetto non superiore " al doppio della somma $\sum_1^n \delta_s D_s$; per modo che se $\sum_1^n \delta_s D_s < \sigma$, " l'errore che si commetterà per eccesso o per difetto prendendo " $\sum_1^n \delta_s f_s$ come valore dell' integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ sarà inferiore a 2σ ". Questi risultati poi valgono evidentemente anche quando $\alpha < \beta$, purchè però allora invece della somma negativa $\sum_1^n \delta_s D_s$ si prenda il suo valore assoluto.

Se poi si osserva in particolare che le δ_s possono sempre supporsi prese tutte eguali fra loro e a $\frac{\beta-\alpha}{n}$, allora evidentemente, oltre a concludere che " il rapporto $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ del- " l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ diviso per l' intervallo d'integrazione può " riguardarsi come il limite della media $\frac{1}{n}\sum_1^n f_s$ di n valori della " funzione presi in punti qualsiasi degli n intervalli nei quali si " suppone diviso l'intervallo totale (α, β), o anche più particolar- " mente come il limite della media di n valori della funzione presi " in punti equidistanti $\alpha, \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}, \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{n}, \ldots \alpha+(n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}$ ",

si concluderà altresì che "una qualunque delle medie stesse $\frac{1}{n}\sum_1^n f_s$
" moltiplicata per l'intervallo d'integrazione $\beta-\alpha$ dà un valore
" approssimato dell'integrale con un errore per eccesso o per
" difetto non superiore al doppio del prodotto dell'intervallo mol-
" tiplicato per la media corrispondente delle oscillazioni $\frac{1}{n}\sum_1^n D_s$ ".

8.° La proprietà che ora abbiamo trovata per le somme $\sum_1^n \delta_s f_s$ conduce ad alcune formole che ci torneranno utili in seguito.

Si osservi perciò che se una funzione finita $f(x)$ è atta alla integrazione in un intervallo (α, β), essa lo è anche in ogni porzione dell'intervallo stesso; e quindi, se si suppone diviso l'intervallo totale (α, β) negli intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, siccome alle somme $\sum_1^i \delta_s f_s$ per $i \leq n$ potrà ancora applicarsi quanto si disse sopra per le somme $\sum_1^n \delta_s f_s$, si avranno evidentemente le formole seguenti:

$$\delta_1 f_1 = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1} f(x)dx + 2k_1 \sum_1^1 \delta_s D_s,$$

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^2 \delta_s} f(x)dx + 2k_2 \sum_1^2 \delta_s D_s,$$

. . . .

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \ldots + \delta_i f_i = \int_\alpha^{\alpha+\sum_1^i \delta_s} f(x)dx + 2k_i \sum_1^i \delta_s D_s,$$

ove $k_1, k_2, \ldots k_i$ sono numeri compresi fra -1 e 1 (questi limiti inclusi); e quindi, supponendo $\sum_1^n \delta_s D_n < \sigma$, e osservando che per $i<n$ si ha in valore assoluto (cioè anche se le δ_s sono negative) $\sum_1^i \delta_s D_s \leq \sum_1^n \delta_s D_s$, si potrà anche scrivere evidentemente:

$$\delta_1 f_1 = \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_1} f(x)dx + 2k_1\sigma,$$

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 = \int_{\alpha}^{\alpha+\sum_1^2 \delta_s} f(x)dx + 2k_2\sigma,$$

. . . .

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \ldots + \delta_i f_i = \int_{\alpha}^{\alpha+\sum_1^i \delta_s} f(x)dx + 2k_i\sigma,$$

essendo ancora $k_1, k_2, \ldots k_i$ numeri compresi fra -1 e 1 (questi limiti incl.).

9.° Mostriamo ora che „ se la funzione $f(x)$ è finita e atta „ alla integrazione in un intervallo finito (α, β), cambiando in un „ modo qualunque il suo valore in un numero finito di punti o „ anche in un gruppo infinito di punti di prima specie, essa „ resterà atta alla integrazione fra α e β, e il valore dell'integrale „ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ non sarà cangiato „.

Si osservi infatti che i punti nei quali viene cangiato il valore della funzione potranno racchiudersi entro un numero finito d'intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ la cui somma sia minore di quel numero che più ci piace ε_1; e poi gli intervalli restanti (nei quali la funzione non avrà subìto verun cangiamento) si potranno scomporre in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots$ tali che la somma di quelli fra questi intervalli nei quali si hanno oscillazioni maggiori di un numero dato ma arbitrariamente piccolo e positivo σ sia minore di quel numero che più ci piace ε_2. Allora evidentemente nella scomposizione così ottenuta dell'intervallo totale (α, β) negli intervalli parziali $(\delta_1, \delta_2, \ldots \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, la funzione variata $\varphi(x)$ non potrà fare oscillazioni maggiori di σ altro che in alcuni intervalli la cui somma sia minore di $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, talchè si può intanto concludere che $\varphi(x)$ sarà atta alla integrazione fra α e β. Oltre a ciò poi, siccome evidentemente si può fare in modo che le somme

$\Sigma' \delta_s f_s + \Sigma \lambda_i f_i$, $\Sigma \delta_s \varphi_s + \Sigma \lambda_i \varphi_i$ (i cui limiti danno i valori degli integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx, \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$) non differiscano fra loro altro che per le somme $\Sigma \lambda_i f_i$, $\Sigma \lambda_i \varphi_i$ che sono estese agli intervalli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ e che quindi non superano la quantità $L(\lambda_1 + \lambda_2 + ..)$ o $L\varepsilon_1$, ove L è un limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ fra α e β, si avrà anche evidentemente $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$, talchè il teorema enunciato sopra resta ora completamente dimostrato.

E ora per questo teorema si può già notare che mentre evidentemente il valore dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ dipende dai valori che la funzione $f(x)$ ha in ogni intorno anche arbitrariamente piccolo di ogni punto dell'intervallo d'integrazione, esso non dipende affatto dal valore che la funzione ha in ogni singolo punto speciale considerato separatamente, giacchè questo valore può mutarsi a piacere senza alterare con ciò il valore dell'integrale.

E in forza della proprietà dimostrata, e come caso particolare di essa, si può altresì notare che se una funzione finita $f(x)$ è soltanto generalmente continua fra α e β, o ha soltanto delle discontinuità in un gruppo di punti di prima specie, il calcolo dell'integrale definito $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ potrà farsi prendendo pel valore della funzione nei punti di discontinuità quel valore finito che più ci piace; ed è per questo appunto che la prima e la terza delle funzioni punteggiate discontinue di cui si parlò nel §. 62 hanno ambedue lo stesso integrale definito fra 0 e x per $x<1$ (§. 189, 3.°), e questo integrale è anche uguale a quello che si avrebbe se la funzione corrispondente nell'intervallo $(0, x)$ che si considera non avesse mai discontinuità e fosse sempre uguale a uno.

10.° Oltre a ciò poi si può anche aggiungere più in generale che " se $f(x)$ è una funzione finita e atta alla integrazione fra

" α e β, il valore dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ non sarà mutato quando
" si cangino i valori della funzione in un gruppo qualunque di
" punti di prima o di seconda specie, in modo però che la nuova
" funzione $\varphi(x)$ sia ancora atta alla integrazione fra α e β e in
" ogni porzione comunque piccola dell'intervallo dato vi siano
" sempre dei punti nei quali il valore della funzione non è can-
" giato „; giacchè allora evidentemente si potrà sempre ammettere che i termini della somma $\Sigma\delta_s\varphi_s$, il cui limite è l'integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$, non differiscano affatto dai termini corrispondenti dell'altra somma $\Sigma\delta_s f_s$ il cui limite è il primitivo integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

11.° In conseguenza poi di questa proprietà, e come caso particolare di essa, è facile vedere che " per tutte le funzioni $f(x)$ che
" fra α e β sono finite e atte alla integrazione, nel calcolo dell'in-
" tegrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ si può sempre fare astrazione dalle discontinuità
" di $f(x)$ che possono togliersi mutando il valore della funzione nei
" punti corrispondenti, e si può sempre intendere ristabilita la
" continuità della funzione col fare questo cangiamento; e nei
" punti x nei quali la funzione ha discontinuità ordinarie si può
" prendere indifferentemente per valore di essa un numero qua-
" lunque compreso fra i due $f(x-0)$ e $f(x+0)$, come nei punti x
" nei quali la funzione da una o da tutte e due le parti ha discon-
" tinuità di seconda specie si potrà prendere per suo valore uno
" qualunque dei numeri compresi fra quelli entro i quali finisce per
" oscillare coll'avvicinarsi indefinitamente di x ai punti stessi „.
Si osservi infatti che siccome la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e β, si potrà sempre immaginare una scomposizione dell'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ tali che la somma degli intervalli nei quali si hanno oscillazioni maggiori di un numero positivo ma arbitrariamente piccolo σ sia minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Oltre a ciò poi quando gli estremi di alcuni degli intervalli

$\delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{n-1}$ interni all'intervallo (α, β) non siano in punti di continuità di $f(x)$, per quanto si disse al §. 188, alla destra e alla sinistra di questi estremi e a distanze da essi inferiori a $\frac{\varepsilon}{4n}$, si potranno sempre segnare dei punti di continuità di $f(x)$, e allora servendosi di questi punti come estremi di nuovi intervalli, si potrà formare una nuova divisione dell'intervallo dato in intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_{n'}$ tali che la somma di quelli nei quali cadono oscillazioni superiori a σ sia inferiore a ε, e tali inoltre che i loro estremi (α e β al più escl.) siano tutti in punti di continuità di $f(x)$. Ora se s' indica con $\varphi(x)$ una funzione che si deduca da $f(x)$ facendo dei cangiamenti nei suoi valori come quelli che abbiamo indicato sopra, si vede subito che in ogni porzione comunque piccola dell'intervallo (α, β) vi saranno sempre dei punti nei quali $\varphi(x)$ e $f(x)$ hanno uno stesso valore, poichè nella stessa porzione esistono sempre dei punti di continuità di $f(x)$; e oltre a ciò poi, valendosi della divisione suindicata dell'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_{n'}$, si vede anche che in ciascuno di questi intervalli (gli intervalli estremi δ'_1 e $\delta'_{n'}$ al più escl.) le oscillazioni della funzione $\varphi(x)$ non supereranno le oscillazioni corrispondenti della funzione $f(x)$, e perciò anche $\varphi(x)$ sarà atta alla integrazione fra α e β; e per la proprietà generale enunciata testè si avrà $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ come appunto avevamo enunciato.

12.° Non si deve poi lasciare di notare che le proprietà ora dimostrate mettono in chiara luce l'esistenza di infinite funzioni $\psi(x)$ punteggiate discontinue che in infiniti punti di qualsiasi porzione anche ristrettissima dell'intervallo dato (α, β) sono differenti da zero, mentre il loro integrale $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \psi(x)dx$ esteso a qualunque porzione (α_1, β_1) dell'intervallo dato è sempre uguale a zero; e, constatate ora queste particolarità, non si può neppure lasciare di osservare che quando si trovi che due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, finite e atte alla integrazione fra α e β, hanno lo stesso integrale in qualunque porzione (α_1, β_1) dell'intervallo (α, β), non si può sempre

asserire che queste funzioni debbano essere uguali fra loro per ogni valori di x fra α e β, potendo esse differire l'una dall'altra per una funzione $\psi(x)$ il cui integrale $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \psi(x)dx$ esteso a qualsiasi porzione (α_1, β_1) dell'intervallo dato sia sempre uguale a zero.

13.° Notiamo anche che dalla definizione stessa degli integrali " definiti apparisce subito che: "se la solita funzione $f(x)$ nei punti " ove è differente da zero ha sempre lo stesso segno, l'integrale " $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ o sarà zero o sarà una quantità differente da zero che " avrà lo stesso segno di $f(x)$ o segno contrario secondochè $\alpha < \beta$ " o $\alpha > \beta$. — E se inoltre fra α e β esisterà un intervallo di am- " piezza finita nel quale $f(x)$ differirà da zero più di una quantità " determinata, l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ sarà differente da zero „; talchè in particolare " esso sarà sempre diverso da zero tutte le volte " che la funzione $f(x)$ non è sempre zero, e nei punti ove non è " zero ha sempre lo stesso segno, e in uno almeno di questi " punti x' è anche continua „; giacchè allora se $f(x')=A$, con A diverso da zero, esisterà un intorno di x' nel quale $f(x)$ differirà da zero più di $\frac{A}{2}$.

14.° E di quì in particolare risulta anche che " le funzioni $\psi(x)$ " atte alla integrazione fra α e β e il cui integrale esteso a qual- " siasi porzione dell'intervallo (α, β) è sempre nullo devono essere " nulle in infiniti punti di qualsiasi porzione comunque piccola " dell'intervallo stesso „; giacchè siccome in questa porzione devono sempre esistere (§. 188) infiniti punti nei quali $\psi(x)$ è continua, se in uno x' di questi punti si avesse $\psi(x')=A$, con A diverso da zero, esisterebbe un intorno $(x'-\varepsilon_1, x'+\varepsilon_2)$ di x' nel quale $\psi(x)$ sarebbe compreso fra $\frac{1}{2}A$ e $\frac{3}{2}A$, e quindi l'integrale $\int_{x'-\varepsilon_1}^{x'+\varepsilon_2} \psi(x)dx$ non sarebbe zero.

E per questa osservazione in forza del teorema del §. 45 si può anche asserire che " le funzioni continue il cui integrale è " nullo in qualunque porzione dell' intervallo (α, β), sono sempre " zero "; e " se due funzioni $f(x)$ e $\psi(x)$ sono finite e atte alla " integrazione fra α e β, e in qualunque porzione (α_1, β_1) dell' in- " tervallo (α, β) hanno sempre lo stesso integrale, esse saranno " uguali in infiniti punti di qualsiasi porzione comunque piccola " dell' intervallo stesso (α, β), e se la loro differenza costituisce " una funzione continua fra α e β, esse saranno sempre uguali " fra loro in tutto l' intervallo stesso (α, β) ".

15.° Si osserverà poi che " se $f(x)$ è una funzione finita e atta " alla integrazione fra α e β, tale sarà pure la funzione $f_1(x)$ for- " mata dai valori assoluti di $f(x)$ "; giacchè evidentemente in ogni porzione dell' intervallo (α, β) le oscillazioni di $f_1(x)$ non saranno mai superiori alle corrispondenti di $f(x)$; " e oltre a ciò poi se " $\alpha<\beta$, in valore assoluto si avrà $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f_1(x)dx$.

16.° Similmente dalla definizione degli integrali o anche per la osservazione 13.ª si vede subito che: "se nell' intervallo (α, β) " le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono finite e atte alla integrazione, " e si ha sempre $f(x) \geq \varphi(x)$, sarà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,, \quad \text{o} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,,$$

" secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$; e se inoltre esisterà fra α e β un " intervallo di ampiezza finita nel quale $f(x)$ è discosto da $\varphi(x)$ " più di una quantità determinata, come avviene in particolare " quando fra α e β esiste almeno un punto x' nel quale la differenza " $f(x)-\varphi(x)$ è differente da zero ed è continua, allora i segni di " eguaglianza non potranno mai aversi e sarà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,, \quad \text{o} \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$$

" secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$ ".

17.° Di quì poi per la osservazione precedente si ha che " se

" la funzione $\varphi(x)$ è finita e atta alla integrazione fra α e β ($\alpha<\beta$)
" e lo stesso accade della funzione $f(x)$ o almeno del prodotto
" $\varphi(x)f(x)$, essendo sempre $f(x)$ numericamente inferiore a un
" numero finito; allora indicando con $\varphi_1(x)$ la funzione formata
" dai valori assoluti di $\varphi(x)$, e con L il limite superiore dei valori
" assoluti di $f(x)$ fra α e β o un numero maggiore, si avrà in
" valore assoluto:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x) \leq \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx\,,$$

giacchè se già non si saprà che il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è atto alla integrazione fra α e β, questo risulterà subito dalle condizioni poste per $f(x)$ (osservazione 5.ª); e se $f_1(x)$ è la funzione dei valori assoluti di $f(x)$, per le due osservazioni precedenti si avrà in valore assoluto:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f_1(x)\varphi_1(x)dx \leq \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx\,.$$

18.° Oltre a questo si trova subito anche che " se la funzione
" $\varphi(x)$ è finita e atta alla integrazione fra α e β, e ove è differente
" da zero ha sempre lo stesso segno, e al tempo stesso la fun-
" zione $f(x)$, oltre essere sempre finita, è pure atta alla integra-
" zione fra α e β, o almeno è tale che il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sia
" atto alla integrazione nello stesso intervallo, allora indicando
" con L e l i limiti superiori e inferiori dei valori di $f(x)$ fra α e β,
" l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx$ sarà compreso fra le due quantità
" $\mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$, $l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx$, o sarà uguale ad una di esse, per
" modo cioè che, supposto p. es. $\alpha<\beta$, si avrà:

$$\mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx \geq l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,,$$

" quando $\varphi(x)$ ove è diverso da zero è positivo; e si avrà invece:

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx \leq l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx,$$

" quando $\varphi(x)$ ove è diverso da zero è negativo„ ; giacchè evidentemente se già non si saprà che il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è atto all'integrazione fra α e β, ciò risulterà subito dalle condizioni che allora avremo per $f(x)$ (osservaz. 5.ª), e quindi per l'osservaz. 13.ª gli integrali $\int_\alpha^\beta \{L-f(x)\}\varphi(x)-dx$, $\int_\alpha^\beta \{f(x)-l\}\varphi(x)dx$ o saranno zero o avranno il segno che ha $\varphi(x)$ nei punti ove essa è diversa da zero. " E se inoltre fra α e β esisterà almeno un intervallo di " ampiezza finita nel quale $\varphi(x)$ è discosto da zero più di una " quantità determinata, e $f(x)$ è discosto da L e da l più di una " quantità determinata anch'esso, come avviene p. es. quando $f(x)$ " in un punto dello stesso intervallo in cui è continua ha un " valore differente da l e da L, allora nelle formole precedenti i " segni di eguaglianza non potranno mai aversi, e sarà sempre " invece o:

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx > \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx > l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx,$$

o:

$$L\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx < \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx < l\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx.$$

19.° Le osservazioni precedenti possono evidentemente servire anche al calcolo approssimato degli integrali definiti, o almeno a trovare facilmente dei limiti entro cui gli integrali stessi devono essere compresi.

Esse poi danno luogo ad altri risultati importanti, e in particolare valendosi dell'ultima si trova che: " se $\varphi(x)$ è una fun" zione che in tutti i punti x fra α e β ove è diversa da zero ha " sempre lo stesso segno, e sono ancora soddisfatte le condizioni " d'integrabilità per $f(x)$ e $\varphi(x)$, o per $\varphi(x)$ e pel prodotto $f(x)\varphi(x)$ " come si disse sopra, allora indicando con θ un numero compreso

" fra i limiti superiori e inferiori L e l dei valori che prende $f(x)$
" fra α e β (questi limiti L e l incl.), si avrà la formola seguente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=\theta\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,,$$

che è di una applicazione costante, e nella quale in forza della osservazione 9.ª e 10.ª il numero θ può anche determinarsi facendo astrazione da alcuni dei valori di $f(x)$ fra α e β, come p. es. dai valori che $f(x)$ prende nei punti estremi α e β; e di quì in particolare, osservando che quando la funzione $f(x)$ sia sempre finita e continua fra α e β esiste almeno un valore x_1 di x fra α e β (α e β inclus.) pel quale si ha: $f(x_1)=\theta$, si troverà subito che:
" nel caso della continuità della funzione finita $f(x)$ fra α e β si
" ha la formola seguente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=f(x_1)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,;$$

talchè osservando che $x_1=\alpha+\varepsilon\,(\beta-\alpha)$, con ε compreso fra 0 e 1 (questi limiti incl)., si potrà anche scrivere:

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=f\Big(\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)\Big)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,;$$

e da queste formole se ne potrebbero ottenere facilmente delle altre che servissero pel caso in cui $\varphi(x)$ fra α e β ha dei cangiamenti di segno, bastando per questo di applicare le formole stesse all' integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(x)+c\}dx$, ove c è una costante conveniente, e talvolta anche potendo spezzare l' intervallo totale (α, β) in un numero finito di intervalli parziali in ciascuno dei quali la funzione $\varphi(x)$ abbia sempre lo stesso segno.

20.° In particolare dunque supponendo $\varphi(x)=1$, e ponendo per semplicità $\beta-\alpha=h$, si avrà sempre:

$$\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx=\theta h\,,$$

essendo θ un numero compreso fra il limite inferiore l e il limite superiore L dei valori di $f(x)$ nell'intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ (questi limiti incl.); e se $f(x)$ sarà continua nell'intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ si avrà:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)dx = hf(\alpha+\varepsilon h),$$

essendo ε una quantità compresa fra 0 e 1 (0 e 1 incl.).

Però in questo caso, per quanto si disse sopra, se $f(x)$ non è costante fra α e $\alpha+h$, il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$ che quì comparisce non sarà nè il massimo nè il minimo dei valori di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$; e quindi, siccome fra i punti μ e ν che corrispondono al massimo e al minimo di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$ si deve sempre trovare un punto *interno* x_1 nel quale $f(x)$ ha il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$, evidentemente pel numero ε che comparisce nelle formole precedenti si potrà sempre prendere un numero compreso fra 0 e 1 e differente da questi limiti.

191. Continuiamo ora a supporre che $f(x)$ sia una funzione di x sempre finita e atta alla integrazione fra α e β, e consideriamo l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.), intendendo che per $x=\alpha$ esso sia zero. Evidentemente questo integrale, avendo un valore determinato e finito per tutti i valori di x fra α e β, potrà considerarsi come una funzione finita di x in questo intervallo, e potremo quindi indicarlo con $\mathrm{F}(x)$; e poichè se $x+h$ è un altro punto qualunque compreso fra α e β (α e β incl.) a destra o a sinistra di x, si avrà evidentemente (§. 190. 2.°).

$$\mathrm{F}(x+h) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{x+h} f(x)dx,$$

ovvero (§. 190. 20.°).

$$\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) = \int_{x}^{x+h} f(x)\,dx = \theta h, \tag{7}$$

essendo θ un numero compreso fra il limite superiore e il limite

" fra i limiti superiori e inferiori L e l dei valori che prende $f(x)$
" fra α e β (questi limiti L e l incl.), si avrà la formola seguente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=\theta\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,,$$

che è di una applicazione costante, e nella quale in forza della osservazione 9.ª e 10.ª il numero θ può anche determinarsi facendo astrazione da alcuni dei valori di $f(x)$ fra α e β, come p. es. dai valori che $f(x)$ prende nei punti estremi α e β; e di quì in particolare, osservando che quando la funzione $f(x)$ sia sempre finita e continua fra α e β esiste almeno un valore x_1 di x fra α e β (α e β inclus.) pel quale si ha: $f(x_1)=\theta$, si troverà subito che: " nel caso della continuità della funzione finita $f(x)$ fra α e β si " ha la formola seguente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=f(x_1)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,;$$

talchè osservando che $x_1=\alpha+\varepsilon\,(\beta-\alpha)$, con ε compreso fra 0 e 1 (questi limiti incl)., si potrà anche scrivere:

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=f\Big(\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)\Big)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,;$$

e da queste formole se ne potrebbero ottenere facilmente delle altre che servissero pel caso in cui $\varphi(x)$ fra α e β ha dei cangiamenti di segno, bastando per questo di applicare le formole stesse all'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(x)+c\}dx$, ove c è una costante conveniente, e talvolta anche potendo spezzare l'intervallo totale (α, β) in un numero finito di intervalli parziali in ciascuno dei quali la funzione $\varphi(x)$ abbia sempre lo stesso segno.

20.° In particolare dunque supponendo $\varphi(x)=1$, e ponendo per semplicità $\beta-\alpha=h$, si avrà sempre:

$$\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx=\theta h\,,$$

essendo θ un numero compreso fra il limite inferiore l e il limite superiore L dei valori di $f(x)$ nell'intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ (questi limiti incl.); e se $f(x)$ sarà continua nell'intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ si avrà:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)dx = hf(\alpha+\varepsilon h),$$

essendo ε una quantità compresa fra 0 e 1 (0 e 1 incl.).

Però in questo caso, per quanto si disse sopra, se $f(x)$ non è costante fra α e $\alpha+h$, il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$ che quì comparisce non sarà nè il massimo nè il minimo dei valori di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$; e quindi, siccome fra i punti μ e ν che corrispondono al massimo e al minimo di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$ si deve sempre trovare un punto *interno* x_1 nel quale $f(x)$ ha il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$, evidentemente pel numero ε che comparisce nelle formole precedenti si potrà sempre prendere un numero compreso fra 0 e 1 e differente da questi limiti.

191. Continuiamo ora a supporre che $f(x)$ sia una funzione di x sempre finita e atta alla integrazione fra α e β, e consideriamo l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.), intendendo che per $x=\alpha$ esso sia zero. Evidentemente questo integrale, avendo un valore determinato e finito per tutti i valori di x fra α e β, potrà considerarsi come una funzione finita di x in questo intervallo, e potremo quindi indicarlo con $F(x)$; e poichè se $x+h$ è un altro punto qualunque compreso fra α e β (α e β incl.) a destra o a sinistra di x, si avrà evidentemente (§. 190. 2.°).

$$F(x+h) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{x+h} f(x)dx,$$

ovvero (§. 190. 20.°).

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(x)\,dx = \theta h, \tag{7}$$

essendo θ un numero compreso fra il limite superiore e il limite

" fra i limiti superiori e inferiori L e l dei valori che prende $f(x)$
" fra α e β (questi limiti L e l incl.), si avrà la formola seguente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=\theta\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,,$$

che è di una applicazione costante, e nella quale in forza della osservazione 9.ª e 10.ª il numero θ può anche determinarsi facendo astrazione da alcuni dei valori di $f(x)$ fra α e β, come p. es. dai valori che $f(x)$ prende nei punti estremi α e β; e di quì in particolare, osservando che quando la funzione $f(x)$ sia sempre finita e continua fra α e β esiste almeno un valore x_1 di x fra α e β (α e β inclus.) pel quale si ha: $f(x_1)=\theta$, si troverà subito che: " nel caso della continuità della funzione finita $f(x)$ fra α e β si " ha la formola seguente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=f(x_1)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,;$$

talchè osservando che $x_1=\alpha+\varepsilon\,(\beta-\alpha)$, con ε compreso fra 0 e 1 (questi limiti incl)., si potrà anche scrivere:

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=f\Big(\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)\Big)\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx\,;$$

e da queste formole se ne potrebbero ottenere facilmente delle altre che servissero pel caso in cui $\varphi(x)$ fra α e β ha dei cangiamenti di segno, bastando per questo di applicare le formole stesse all'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(x)+c\}dx$, ove c è una costante conveniente, e talvolta anche potendo spezzare l'intervallo totale (α,β) in un numero finito di intervalli parziali in ciascuno dei quali la funzione $\varphi(x)$ abbia sempre lo stesso segno.

20.° In particolare dunque supponendo $\varphi(x)=1$, e ponendo per semplicità $\beta-\alpha=h$, si avrà sempre:

$$\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx=\theta h\,,$$

essendo θ un numero compreso fra il limite inferiore l e il limite superiore L dei valori di $f(x)$ nell'intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ (questi limiti incl.); e se $f(x)$ sarà continua nell'intervallo $(\alpha, \alpha+h)$ si avrà:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(x)dx = hf(\alpha+\varepsilon h),$$

essendo ε una quantità compresa fra 0 e 1 (0 e 1 incl.).

Però in questo caso, per quanto si disse sopra, se $f(x)$ non è costante fra α e $\alpha+h$, il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$ che quì comparisce non sarà nè il massimo nè il minimo dei valori di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$; e quindi, siccome fra i punti μ e ν che corrispondono al massimo e al minimo di $f(x)$ fra α e $\alpha+h$ si deve sempre trovare un punto *interno* x_1 nel quale $f(x)$ ha il valore $f(\alpha+\varepsilon h)$, evidentemente pel numero ε che comparisce nelle formole precedenti si potrà sempre prendere un numero compreso fra 0 e 1 e differente da questi limiti.

191. Continuiamo ora a supporre che $f(x)$ sia una funzione di x sempre finita e atta alla integrazione fra α e β, e consideriamo l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.), intendendo che per $x=\alpha$ esso sia zero. Evidentemente questo integrale, avendo un valore determinato e finito per tutti i valori di x fra α e β, potrà considerarsi come una funzione finita di x in questo intervallo, e potremo quindi indicarlo con $F(x)$; e poichè se $x+h$ è un altro punto qualunque compreso fra α e β (α e β incl.) a destra o a sinistra di x, si avrà evidentemente (§. 190. 2.°).

$$F(x+h) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{x+h} f(x)dx,$$

ovvero (§. 190. 20.°).

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(x)\,dx = \theta h, \tag{7}$$

essendo θ un numero compreso fra il limite superiore e il limite

$f(a) - \frac{\sigma}{2}$ e $f(a) + \frac{\sigma}{2}$, e in conseguenza le loro oscillazioni in quest'intervallo saranno inferiori a σ; talchè evidentemente noi possiamo senz'altro asserire che questi estremi oscillatorii saranno atti essi pure alla integrazione fra α e β.

Se dunque, secondo le notazioni del capitolo precedente, noi indichiamo questi estremi oscillatorii con λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x, per questo, e per quanto abbiamo detto sopra, noi possiamo inferirne (§. 190. 10.°) che gli integrali $\int_\alpha^x \lambda_x dx$, $\int_\alpha^x \Lambda_x dx$, $\int_\alpha^x \lambda'_x dx$, $\int_\alpha^x \Lambda'_x dx$, oltre ad avere tutti un significato, hanno anche un valore comune che è precisamente quello dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$, o $F(x) - F(\alpha)$; dunque noi possiamo intanto concludere in generale che: *se pei valori di x fra α e β una funzione finita e continua* $F(x)$ *proviene all'infuori di una costante dall'integrare una funzione* $f(x)$ *che fra α e β è sempre finita e atta alla integrazione, gli estremi oscillatorii λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x dei suoi rapporti incrementali, oltre essere finiti, saranno atti alla integrazione, e integrati fra α e x riprodurranno tutti la funzione primitiva* $F(x)$ *all'infuori di una costante* $F(\alpha)$, *per modo cioè che si avrà:*

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)dx = \int_\alpha^x \lambda_x dx = \int_\alpha^x \Lambda_x dx = \int_\alpha^x \lambda'_x dx = \int_\alpha^x \Lambda'_x dx.$$

198. Il teorema ora enunciato dà una proprietà generale degli integrali, e costituisce la prima parte di quello cui alludevamo sopra. Per dimostrare ora anche la seconda, noi, senza supporre nulla a priori intorno al modo secondo cui la funzione finita e continua $F(x)$ proviene da altre funzioni finite $f(x)$ per tutti i valori di x fra α e β, continueremo a indicare con λ_x, Λ_x, λ'_x, e Λ'_x gli estremi oscillatorii dei suoi rapporti incrementali fra α e β; e supponendo che i loro limiti inferiori λ e Λ per l'intervallo (α, β) siano finiti, ammetteremo che si sappia che uno di questi estremi oscillatorii, λ_x p. es., costituisce una funzione atta alla integrazione fra α e β.

Con queste ipotesi, potremo ancora scomporre l' intervallo totale (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tali che escludendone alcuni la cui somma sia inferiore a quel numero che più ci piace ε, in tutti gli altri le oscillazioni di λ_x siano inferiori a σ; e allora, indicando con $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ i punti corrispondenti di divisione, e supponendo $\alpha<\beta$, per una proprietà nota dei rapporti incrementali e dei loro estremi oscillatorii (§. 147), avremo le eguaglianze:

$$\frac{F(x_1)-F(\alpha)}{\delta_1}=\lambda_1, \qquad \frac{F(x_2)-F(x_1)}{\delta_2}=\lambda_2, \ldots$$

$$\frac{F(x_s)-F(x_{s-1})}{\delta_s}=\lambda_s, \ldots, \frac{F(\beta)-F(x_n)}{\delta_n}=\lambda_n,$$

essendo in generale λ_s un numero *determinato* compreso fra i limiti inferiori e superiori di λ_x nell' intervallo δ_s (*), e perciò sarà anche:

$$F(\beta)-F(\alpha)=\sum_1^n \delta_s \lambda_s .$$

Ma poichè, indicando con Δ_s le oscillazioni di λ_x nell' intervallo δ_s, si ha $\sum_1^n \delta_s \Delta_s<(\beta-\alpha)\sigma+\varepsilon(\Lambda-\lambda)$, per un teorema noto (§. 190. 7.°) si può affermare che l'integrale $\int_\alpha^\beta \lambda_x \, dx$ differisce da $\sum_1^n \delta_s \lambda_s$, o da $F(\beta)-F(\alpha)$ meno della quantità $2(\beta-\alpha)\sigma+2\varepsilon(\Lambda-\lambda)$

(*) È degno di nota che le formole di cui qui ci serviamo corrispondono alla seguente:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lambda_h,$$

ove λ_h è un numero *determinato* compreso fra i limiti inferiore e superiore degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di $F(x)$ fra x e $x+h$; e questa comprende come caso particolare l'altra:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x+\theta h), \quad (0<\theta<1),$$

che si ha quando esiste la derivata ordinaria di $F(x)$, e può riguardarsi come la formola da sostituirsi a questa pel caso delle funzioni finite e continue $F(x)$ per le quali la ordinaria derivata manca, o almeno si è incerti sulla esistenza o sulla natura di questa derivata.

che può supporsi arbitrariamente piccola; dunque è certo ora che si avrà sempre $F(\beta)-F(\alpha)=\int_\alpha^x \lambda_x dx$, e quindi, poichè invece dell'intervallo (α, β) si può prendere anche una sua porzione qualunque (α, x), si avrà anche:

$$F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x \lambda_x dx,$$

talchè si ritorna così nel caso del teorema precedente, e si può quindi evidentemente concludere che: *se una funzione* $F(x)$ *finita e continua in un intervallo* (α, β) *è tale che in questo intervallo uno degli estremi oscillatorii* λ_x *dei suoi rapporti incrementali sia sempre numericamente inferiore a un numero finito e sia atto alla integrazione, allora altrettanto accadrà degli altri estremi oscillatorii* Λ_x, λ'_x *e* Λ'_x, *e gli integrali* $\int_\alpha^x \lambda_x dx$, $\int_\alpha^x \Lambda_x dx$, $\int_\alpha^x \lambda' dx$, $\int_\alpha^x \Lambda'_x dx$ *avranno tutti un valore comune che non potrà differire dalla funzione primitiva* $F(x)$ *altro che per una quantità costante* $F(\alpha)$, *per modo cioè che si avrà sempre:*

$$F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x \lambda_x dx=\int_\alpha^x \Lambda_x dx=\int_\alpha^x \lambda'_x dx=\int_\alpha^x \Lambda'_x dx.$$

199. Questo teorema estende evidentemente i risultati ottenuti nel §. 196 e ci dà come caso particolare l'altro che dice che: *se per una funzione finita e continua* $F(x)$ *le derivate a destra* d_x *sono sempre determinate e finite nell'intervallo* (α, β), *e costituiscono una funzione atta alla integrazione fra* α *e* β, *l'integrale* $\int_\alpha^x d_x dx$ *non differirà dalla funzione* $F(x)$ *altro che per una costante* $F(\alpha)$; *e se al tempo stesso esistono anche le derivate* d'_x *di* $F(x)$ *a sinistra, allora anch'esse saranno atte all'integrazione fra* α *e* β, *e i due integrali* $\int_\alpha^x d_x dx$, $\int_\alpha^x d'_x dx$ *saranno uguali fra*

loro e a $F(x)-F(\alpha)$, *per modo cioè che si avrà:*

$$F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x d_x dx=\int_\alpha^x d'_x dx\,;$$

talchè può dirsi tolto pienamente il primo dei dubbii che noi avevamo elevato al §. 197.

E si può notare che questo teorema particolare continua a sussistere anche quando fra α e β esiste un gruppo di punti G di prima specie nei quali siamo incerti intorno alla esistenza delle derivate d_x o d'_x, pur sapendo sempre che negli intorni di questi punti gli estremi oscillatorii si mantengono inferiori a un numero finito; come si può notare altresì che in forza sempre di questo teorema si può affermare in particolare che i risultati del §. 197 continuano a sussistere anche quando senza supporre nulla intorno alla natura delle discontinuità di d_x o d'_x, si suppone soltanto che queste funzioni siano atte alla integrazione.

200. Come abbiamo detto adunque, il primo dei dubbii che avevamo sollevato al principio del §. 197 può riguardarsi come tolto dal teorema del paragrafo precedente.

Non così accade però del secondo dei dubbî elevati nello stesso paragrafo; e anzi esso può riguardarsi come giustificato o almeno reso molto verosimile dalle considerazioni che seguono.

Dimostriamo perciò in generale che: *se una funzione finita e continua* $F(x)$, *senza essere sempre costante fra* α *e* β, *presenta dei massimi e minimi o dei tratti d'invariabilità in qualunque porzione dell'intervallo* (α, β), *gli estremi oscillatorii dei suoi rapporti incrementali non costituiranno mai funzioni atte alla integrazione in nessuno intervallo compreso fra* α *e* β *che non sia un tratto d'invariabilità di* $F(x)$ *(l'intervallo* (α, β) *inclus.).*

Si osservi infatti che, riferendosi p. es. all'estremo oscillatorio λ_x, noi possiamo limitarci a considerare il caso in cui vi siano almeno degli intervalli nei quali esso è finito, poichè se in qualunque porzione dell'intervallo vi fossero dei punti nei quali λ_x è infinito o almeno prende valori maggiori numericamente di qualsiasi quantità data, altrettanto accadrebbe degli altri estremi oscillatorii, e allora basterebbe questo (come apparirà bene anche

da ciò che esporremo in seguito), perchè nessuno dei varii estremi oscillatorii potesse riguardarsi come atto all'integrazione in intervalli presi fra α e β (*).

Ora, ammesso pure che in un certo intervallo l'estremo oscillatorio λ_x si mantenesse sempre compreso fra numeri finiti, osserviamo che se (α_1, β_1) è una porzione di questo intervallo, e non è un tratto di invariabilità di $F(x)$, quand' anche fosse $F(\alpha_1)=F(\beta_1)$ si potrebbe sempre estrarne un altro intervallo (α', β') pel quale non si avesse $F(\alpha')=F(\beta')$; e ora immaginando scomposto questo intervallo (α_1, β_1) o (α', β'), p. es. quest'ultimo, in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ coi punti di divisione $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, per un teorema noto (§. 147) avremo come nel paragrafo precedente:

$$\frac{F(x_1)-F(\alpha')}{\delta_1}=\lambda_1, \quad \frac{F(x_2)-F(x_1)}{\delta_2}=\lambda_2, \ldots, \quad \frac{F(\beta')-F(x_{p-1})}{\delta_p}=\lambda_p;$$

e quindi sarà anche:

$$F(\beta')-F(\alpha')=\sum_1^p \delta_s\lambda_s,$$

essendo in generale λ_s un numero *determinato* compreso fra il limite inferiore e il limite superiore dei valori di λ_x nell'intervallo δ_s, talchè, evidentemente noi possiamo dire intanto che quando si prendano per λ_s dei valori *determinati* compresi fra i limiti inferiore e superiore dei valori di λ_x nell' intervallo corrispondente δ_s, le somme $\sum_1^p \delta_s\lambda_s$, e così anche i loro limiti, riprodurranno sempre la differenza $F(\beta')-F(\alpha')$, la quale per le ipotesi fatte sarà diversa da zero.

Ora, ammesso p. es. che questa differenza sia positiva, si osserverà che siccome negli intervalli δ_s la funzione $F(x)$ ha infiniti massimi e minimi, o ha dei tratti d'invariabilità, esisteranno

(*) Per l'ordine che seguiamo in questi studii avremmo dovuto non parlare ora di funzioni $F(x)$ per le quali gli estremi oscillatorii dei loro rapporti incrementali fossero infiniti o potessero crescere indefinitamente, riservandosi a parlarne più oltre. Però, trovando utile di enunciare ora il teorema generale, mi sono permesso di deviare momentaneamente dall'ordine stabilito.

in essi anche infiniti punti x nei quali λ_x è negativa o nulla; e quindi se nelle somme $\sum_1^p \delta_s \lambda_s$, invece di prendere per λ_s i valori *determinati* di cui parlavamo testè, si prenderanno sempre questi valori negativi o nulli, le somme stesse non potranno esser positive e avere il limite positivo $F(\beta')-F(\alpha')$, come dovrebbe essere onde λ_x fosse atta alla integrazione fra α' e β'; dunque resta ora evidente che, sotto le attuali ipotesi, la funzione λ_x non sarà atta alla integrazione nell' intervallo (α', β'), e quindi neppure nell' intervallo (α_1, β_1); e il teorema può dirsi completamente dimostrato.

Come caso particolare dunque si ha di quì che: *se una funzione finita e continua* $F(x)$, *senza essere sempre costante fra* α *e* β, *presenta dei massimi e minimi o dei tratti d'invariabilità in qualunque porzione dell'intervallo* (α, β), *e al tempo stesso la sua derivata ordinaria* $F'(x)$, *o almeno quella a destra* d_x, *o quella a sinistra* d'_x, *sono sempre determinate e finite, queste derivate non saranno mai atte alla integrazione in nessun intervallo compreso fra* α *e* β *che non sia un tratto d'invariabilità della funzione (l'intervallo* (α, β) *incl.).*

Questo teorema particolare serve di complemento a quello del §. 130, e può dirsi che giustifichi il secondo dei dubbii elevati in principio del §. 197 o almeno che lo renda molto verosimile; pôichè, come è certo che esistono funzioni finite e continue $F(x)$ che hanno infiniti massimi e minimi in qualunque intervallo fra α e β e alle quali in conseguenza è applicabile il teorema generale enunciato sopra, così è per lo meno molto probabile (e anzi lo abbiamo ammesso per certo in altra occasione) che esistano anche alcune funzioni finite e continue $F(x)$ che abbiano tutti questi massimi e minimi, e abbiano al tempo stesso la derivata ordinaria o almeno la derivata da una parte determinata e finita in ogni punto.

201. Gli ultimi risultati, e specialmente quelli dei §§. 197 e 198 pongono sempre più in evidenza la importanza dei rapporti incrementali delle funzioni e dei loro estremi oscillatorii.

Per essi poi noi possiamo evidentemente asserire che quando

partendo da una funzione $f(x)$ finita e atta alla integrazione in un dato intervallo si passa alla funzione integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$, gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali dell'integrale (se non le derivate che potrebbero non esistere) riproducono la funzione data $f(x)$, o alcune delle funzioni che sono finite e atte alla integrazione, e che integrate tornano a riprodurre la funzione $\int_\alpha^x f(x)dx$ per modo da dover dire che esse non differiscono dalla funzione primitiva $f(x)$ altro che per una funzione d'integrale nullo; e partendo invece da una funzione finita e continua $F(x)$ per la quale gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali fra α e β sono finiti e atti alla integrazione, se si determineranno questi estremi oscillatorii e si applicherà loro la integrazione si riprodurrà sempre la funzione primitiva $F(x)$ all'infuori di una costante; talchè *in questi casi,* e astrazione fatta dalle funzioni d'integrale nullo e dalle funzioni di derivata nulla (costanti), noi possiamo dire che *le operazioni di integrazione e di ricerca degli estremi oscillatorii vengono ad essere operazioni inverse.*

E così generalizzando ora quanto dicemmo al §. 194 noi possiamo affermare che avendo una funzione $f(x)$ finita e atta alla integrazione fra α e β, se si troverà con un processo qualunque una funzione finita e continua $F(x)$ per la quale le derivate a destra o a sinistra o gli estremi oscillatorii dei suoi rapporti incrementali siano uguali a $f(x)$, o ne differiscano soltanto per una funzione di integrale nullo, allora la funzione $F(x)$ non differirà dall'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ altro che per una costante, per modo che si avrà $F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x f(x)dx$, ec...

202. Merita poi di essere notato che in forza dei risultati precedenti si potrà anche affermare che *quando uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di una funzione è sempre finito e atto alla integrazione fra α e β, la quantità $\Lambda_x-\lambda_x$ che*

chiamammo oscillazione derivatoria destra di $f(x)$ (§. 145), *e così l'altra* $\Lambda'_x - \lambda'_x$ *che chiamammo oscillazione derivatoria sinistra, come anche le differenze* $\Lambda_x - \Lambda'_x$, $\lambda_x - \lambda'_x$ *sono tutte funzioni d'integrale nullo in qualunque porzione dell' intervallo* (α, β).

Similmente: *se per la funzione* $F(x)$ *le derivate a destra* d_x *e quelle a sinistra* d'_x, *oltre ad essere sempre determinate e finite, sono atte alla integrazione fra* α *e* β, *la loro differenza* $d_x - d'_x$ *costituirà una funzione d'integrale nullo;* talchè ricordando che col principio della condensazione della sigolarità si possono costruire funzioni (come p. es. la prima del §. 116) che senza ammettere sempre la derivata ordinaria hanno però sempre una derivata a destra e una derivata a sinistra determinate e finite e atte alla integrazione in qualunque intervallo finito, resta ora evidente che *il principio della condensazione delle singolarità può anche servire a costruire infinite funzioni d'integrale nullo in qualsiasi intervallo finito;* e si possono così avere facilmente esempii speciali di queste funzioni, la cui esistenza del resto risulta già chiaramente da quanto si disse al §. 190. 12.°

203. Aggiungiamo che dai teoremi dimostrati apparisce anche una generalizzazione di quello del §. 152, poichè si può ora affermare che: *se* $F(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono due funzioni che fra* α *e* β *sono finite e continue e in ogni punto di questo intervallo le loro derivate prese da una stessa parte, che però può non essere la stessa per le due funzioni, sono determinate e finite e sono atte alla integrazione, e in qualunque porzione comunque piccola dell' intervallo* (α, β) *esistono sempre dei punti nei quali queste derivate sono uguali, allora le due funzioni date* $F(x)$ *e* $\varphi(x)$ *saranno uguali o differiranno l'una dall'altra per una costante,* giacchè se d_1 e d_2 sono le indicate derivate di $F(x)$ e $\varphi(x)$, pel teorema del §. 199 avremo:

$$F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x d_1 dx,\quad \varphi(x)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^x d_2 dx,$$ e per essere (§.190. 10.°)

$$\int_\alpha^x d_1 dx=\int_\alpha^x d_2 dx,$$ sarà anche $F(x)-\varphi(x)=\text{cost.}$

204. Dimostriamo ora il seguente teorema che riesce utile in molti casi.

Se, essendo $f(x)$ una funzione di x finita e atta alla integrazione nell'intervallo (α, β) ($\alpha<\beta$, o anche $\alpha>\beta$), l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ per ogni valore di x fra α e β (α e β inclus.) è sempre compreso fra due numeri a e A (a e A escl.), in modo che si ha:

$$(8) \qquad a<\int_\alpha^x f(x)dx<A\,;$$

e se $\varphi(x)$ è un altra funzione di x nello stesso intervallo (α, β) che è sempre finita e che col variare di x da α a β non và mai crescendo e non diviene mai negativa, allora la funzione $f(x)\varphi(x)$ sarà pure atta alla integrazione fra α e β, e l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$ sarà sempre compreso fra i numeri $a\,\varphi(\alpha)$ e $A\varphi(\alpha)$ (questi limili escl.), per modo cioè che si avrà:

$$(9) \qquad a\varphi(\alpha)<\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx<A\varphi(\alpha)\,,$$

per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.).

Si osservi infatti dapprima che le condizioni poste per $\varphi(x)$ portano (§. 187. 6.°) che essa sia atta alla integrazione definita fra α e β, e perciò anche fra α e x per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.).

Si dedurrà da ciò che lo stesso accade (§. 190. 5.°) della funzione $f(x)\varphi(x)$, e che supponendo scomposto l'intervallo da α a x in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, e indicando con f_s e φ_s dei valori compresi fra i limiti inferiori e superiori di $f(x)$ e $\varphi(x)$ nell'intervallo δ_s, si ha:

$$\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx=\lim\sum_1^n \delta_s f_s \varphi_s\,;$$

talche, pel teorema di Abel dato al §. 89, si può dire intanto che, per dimostrare la proprietà enunciata sopra, basterà far vedere che per ogni valore di x fra α e β (α e β incl.) esiste un numero speciale differente da zero e positivo ε tale che per tutti i valori

delle δ_s inferiori ad ε le somme $\sum_1^{n'} \delta_s f_s$ pei valori di n' non superiori al valore corrispondente di n siano sempre tutte comprese fra a e A (questi limiti escl.).

Per questo, osserviamo che siccome l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ è una funzione finita e continua di x fra α e β, la differenza $A - \int_\alpha^x f(x)dx$ per un valore determinato di x fra α e β *prenderà effettivamente* il suo valore minimo σ; quindi, per le ipotesi fatte, questo numero σ sarà differente da zero e positivo, e siccome la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e β, esisterà un numero positivo ε tale che per tutti i sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ inferiori ad ε si abbia $\sum_1^n \delta_s D_s < \frac{\sigma}{4}$, essendo D_s le oscillazioni di $f(x)$ negli intervalli δ_s.

Ma, per quanto si disse al §. 190. 8.°, se δ_i è uno qualunque degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ che così si hanno, sarà in valore assoluto:

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \ldots + \delta_i f_i - \int_\alpha^{\alpha + \sum_1^i \delta_s} f(x)dx < \frac{\sigma}{2};$$

quindi, poichè, in forza delle condizioni poste sopra, qualunque sia il punto x' fra α e β in cui viene a cadere il punto $\alpha + \sum_1^i \delta_s$, l'integrale $\int_\alpha^{\alpha + \sum_1^i \delta_s} f(x)dx$ non supera mai il numero $A - \sigma$, si può intanto asserire che quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ saranno tutte inferiori ad ε le varie somme $\delta_1 f_1$, $\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2$, $\ldots$, $\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \ldots + \delta_i f_i$ non supereranno mai la quantità $A - \frac{\sigma}{2}$.

In simil modo si vede che se σ_1 è il minimo valore della differenza $\int_\alpha^x f(x)dx - a$ pei varii valori di x fra α e β, le somme suindicate, quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ saranno tutte inferiori a un

dato numero positivo ε_1, non potranno mai essere inferiori alla quantità $a+\frac{\sigma_1}{2}$; quindi, pel teorema di Abel ricordato sopra, le somme $\sum_1^n \delta_s f_s \varphi_s$ che conducono al valore dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$ saranno sempre comprese fra le due quantità $\left(a+\frac{\sigma_1}{2}\right)\varphi(\alpha)$ e $\left(A-\frac{\sigma}{2}\right)\varphi(\alpha)$, e lo stesso accadrà anche del loro limite; talchè il teorema enunciato può dirsi ora completamente dimostrato.

Farò notare che anche se $\varphi(x)$ è discontinua nel punto α, nel teorema precedente a $\varphi(\alpha)$ si potrà sempre sostituire $\varphi(\alpha+0)$ o $\varphi(\alpha-0)$ secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$; giacchè, per le ipotesi fatte, la quantità $\varphi(\alpha+0)$ per $\alpha<\beta$ e l'altra $\varphi(\alpha-0)$ per $\alpha>\beta$ ha un significato (§. 25), e l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$ ha sempre lo stesso valore anche quando pel valore di $\varphi(x)$ nel punto α si prende $\varphi(\alpha+0)$ o $\varphi(\alpha-0)$ invece di $\varphi(\alpha)$.

205. Quando la funzione $\varphi(x)$ invece di soddisfare alla condizione di non andare mai crescendo da α a β, soddisfa all'altra di non andare mai decrescendo, quand'anche resti sempre positiva, il teorema precedente cessa talvolta di sussistere.

Però in questo caso, e anche più generalmente *quando $\varphi(x)$ da α a β non và mai decrescendo, potendo anche essere negativa, e pei valori di x fra α e β (α e β inclus.) si hanno ancora le diseguaglianze* (8), *allora per gli stessi valori di x sarà sempre:*

$$(10) \quad A\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)(A-a)<\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx<a\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)(A-a),$$

ovvero:

$$(11) \quad a\varphi(\beta)-A\{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\}<\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx<A\varphi(\beta)-a\{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\}$$

quando $\varphi(x)$ è positivo o nulla; e sarà invece:

(12) $$A\varphi(\alpha) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < a\varphi(\alpha)\ ,$$

quando $\varphi(\beta)$ *è negativo o nullo.*

Si osservi infatti che sotto le attuali ipotesi la differenza $\varphi(\beta)-\varphi(x)$ fra α e β non sarà mai negativa, nè sarà mai crescente, e quindi applicando la formola (9) si avrà l'altra:

$$a\{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\} < \int_\alpha^x f(x)\{\varphi(\beta)-\varphi(x)\}dx < A\{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\}\ ,$$

ovvero:

$$A\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\left\{A-\int_\alpha^x f(x)dx\right\} < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < a\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)\left\{\int_\alpha^x f(x)dx-a\right\}$$

e da questa valendosi della (8) nel caso di $\varphi(\beta)$ positivo o zero si trova subito la (10) e quindi anche la (11), e nel caso di $\varphi(\beta)$ negativo o zero si ha subito evidentemente la (12).

206. Oltre a ciò poi è facile vedere che: *se per tutti i valori di* x *fra* α e β (α *e* β *incl.*) *si ha in valore assoluto:*

(13) $$\int_\alpha^x f(x)dx < A\ ,$$

e $\varphi(x)$ *da* α *a* β *non è mai decrescente nè negativa, allora, sempre in valore assoluto, si avrà anche:*

(14) $$\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < 2A\varphi(\beta)\ ;$$

giacchè se si osserva che ora può applicarsi la (10) col supporvi $a=-A$, si vede subito che il valore assoluto dell' integrale $\int_\beta^x f(x)\varphi(x)dx$ viene ad essere inferiore a $2A\varphi(\beta)-A\varphi(\alpha)$ e quindi anche a $2A\varphi(\beta)$.

207. Di quì dunque si può anche concludere più in generale che: *se pei valori di* x *fra* α *e* β (α *e* β *inclus.*) *si avrà, sempre in*

valore assoluto, $\int_\alpha^x f(x)dx < A$; *e se la funzione* $\varphi(x)$ *fra* α *e* β, *oltre a non cangiar di segno un numero infinito di volte, non farà neppure un numero infinito di oscillazioni, per modo cioè che l'intervallo* (α, β) *si possa scomporre in un numero finito* p *d'intervalli* (α, β_1), $(\beta_1, \beta_2), \ldots (\beta_{p-1}, \beta)$ *tali che in ciascuno di essi separatamente la funzione stessa* $\varphi(x)$ *abbia sempre lo stesso segno e non vada mai crescendo o non vada mai decrescendo mentre* x *passa da un estremo dell'intervallo all'altro, allora si avrà, sempre in valore assoluto:*

$$\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < 2pA\varphi_0, \tag{15}$$

essendo φ_0 *il limite superiore dei valori assoluti di* $\varphi(x)$ *fra* α *e* β.

208. Quando poi la funzione $\varphi(x)$ fra α e β abbia un numero infinito di massimi e minimi allora i teoremi precedenti non sono più applicabili, e il più spesso per avere dei limiti fra i quali l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$ è compreso conviene seguire processi speciali dipendenti dalla natura delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$.

Nel caso però in cui la funzione $\varphi(x)$ è continua da α a β ed è una di quelle funzioni che noi chiamammo di prima specie (§. 134), allora, quand'anche fra α e β essa abbia un numero infinito di massimi e minimi, indicando con $\mu x + \nu$ una funzione di primo grado convenientemente scelta, si potrà formare una funzione $\varphi(x) - \mu x - \nu$ che sia sempre positiva e sempre crescente o sempre decrescente da α a β; e quindi applicando le formole precedenti all'integrale $\int_\alpha^x \{\varphi(x) - \mu x - \nu\} f(x)dx$ potremo ancora ottenere dei limiti inferiori o superiori dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$.

In particolare, se il limite superiore Λ dei valori dei rapporti incrementali di $\varphi(x)$ fra α e β è finito, e $\alpha < \beta$, prendendo $\mu \geq \Lambda$ la funzione $\varphi(x) - \mu x - \nu$ non andrà mai crescendo da α a β (§. 172);

e determinando poi convenientemente il ν si potrà anche fare in modo che essa sia sempre positiva; talchè allora se per tutti i valori di x fra α e β si avrà:

$$(16)\qquad a < \int_\alpha^x f(x)dx < A\,,$$

per il teorema del §. 204 si troverà subito che:

$$a\{\varphi(\alpha)-\mu\alpha-\nu\} < \int_\alpha^x \{\varphi(x)-\mu x-\nu\} f(x)dx < A\{\varphi(\alpha)-\mu\alpha-\nu\}\,,$$

ovvero:

$$(17)\quad a\{\varphi(\alpha)-\mu\alpha-\nu\}+\int_\alpha^x(\mu x+\nu)f(x)dx<\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx<$$
$$<A\{\varphi(\alpha)-\mu\alpha-\nu\}+\int_\alpha^x(\mu x+\nu)f(x)dx\,,$$

e si avranno intanto così due limiti fra i quali l'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$ si mantiene sempre compreso finchè x trovasi fra α e β (α e β incl.).

Questi limiti però possono ridursi più semplici. Si osservi per questo che, quando si ha la (16), la formola (10), col farvi $\varphi(x)=x$, per $\beta \geq 0$ ci dà la seguente:

$$A\alpha-\beta(A-a)<\int_\alpha^x xf(x)dx<a\alpha+\beta(A-a)$$

mentre la (12) per $\beta \leq 0$ ci dà invece l'altra:

$$A\alpha<\int_\alpha^x xf(x)dx<a\alpha\,;$$

e ora valendosi di queste formole e della (16), coll'osservare che il numero Λ (e quindi μ) può sempre supporsi positivo o nullo, perchè altrimenti $\varphi(x)$ sarebbe già decrescente da α a β, e allora si avrebbe subito la formola (9), e il numero ν può sempre sup-

porsi negativo o nullo, altrimenti non sarebbe neppure necessario di introdurlo in calcolo, si vedrà subito che la formola (17) per $\beta \geq 0$ si può ridurre sempre all'altra:

$$(18) \quad a\varphi(\alpha) - \{\mu(\beta-\alpha)-\nu\}(A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < A\varphi(\alpha) - \\ + \{\mu(\beta-\alpha)-\nu\}(A-a) ,$$

e per $\beta \leq 0$ si riduce invece all'altra:

$$(19) \quad a\varphi(\alpha)+(\mu\alpha+\nu)(A-a) < \int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx < A\varphi(\alpha)-(\mu\alpha+\nu)(A-a);$$

e queste danno appunto due limiti assai semplici fra i quali è compreso il valore dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx$ per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.).

È da notare che quando si conosca il numero Λ, potremo prendere $\mu=\Lambda$; e allora siccome la funzione $\varphi(x)-\Lambda x-\nu$ non andrà mai crescendo da α a β, onde non sia negativa basterà prendere ν in modo che sia $\varphi(\beta)-\Lambda\beta-\nu \geq 0$; e quindi potremo sempre prendere $\nu=\varphi(\beta)-\Lambda\beta$ tutte le volte che $\varphi(\beta)-\Lambda\beta$ è negativo o nullo.

209. Invece poi delle formole (18) e (19), quando (come già abbiamo detto poter sempre supporre) il μ è positivo, se ne possono avere anche altre che torneranno spesso più comode.

Si osservi infatti che se $\alpha<\beta$ e μ è positivo, la funzione $\mu x+\nu$ da α a β è sempre crescente, e quindi pel teorema del §. 205, se $\mu\beta+\nu \geq 0$ si avrà:

$$A(\mu\alpha+\nu)-(\mu\beta+\nu)(A-a) < \int_\alpha^x (\mu x+\nu)f(x)dx < a(\mu\alpha+\nu)+(\mu\beta+\nu)(A-a);$$

e se $\mu\beta+\nu \leq 0$ si avrà:

$$A(\mu\alpha+\nu) < \int_\alpha^x (\mu x+\nu)f(x)dx < a(\mu\alpha+\nu) ,$$

e quindi sostituendo nella (17), pel caso di $\mu\beta+\nu \geq 0$ si troverà la formola:

$$(20)\quad a\varphi(\alpha)-\mu(\beta-\alpha)(A-a)<\int_{\alpha}^{x}f(x)\varphi(x)dx<A\varphi(\alpha)+\mu(\beta-\alpha)(A-a);$$

e pel caso di $\mu\beta+\nu\leq 0$ si avrà invece l'altra:

$$(21)\quad a\varphi(\alpha)+(\mu\alpha+\nu)(A-a)<\int_{\alpha}^{x}f(x)\varphi(x)dx<A\varphi(\alpha)-(\mu\alpha+\nu)(A-a),$$

che concorda colla (19); e queste sono le formole che volevamo trovare.

Osservando poi che insieme a $\mu\geq\Lambda$ deve essere $\varphi(\beta)-(\mu\beta+\nu)\geq 0$, si vede subito che quando $\varphi(\beta)$ è negativo o nullo, $\mu\beta+\nu$ deve essere pure negativo o deve essere uguale a zero e basta prendere $\nu=\varphi(\beta)-\mu\beta$; talchè allora dalla (21) si ha la formola:

$$(22)\quad a\varphi(\alpha)-\left\{\mu(\beta-\alpha)-\varphi(\beta)\right\}(A-a)<\int_{\alpha}^{x}f(x)\varphi(x)dx<A\varphi(\alpha)+$$
$$+\left\{\mu(\beta-\alpha)-\varphi(\beta)\right\}(A-a),$$

che vale perciò quando $\varphi(\beta)$ è negativo o nullo.

Invece se $\varphi(\beta)\geq 0$, il ν può intendersi preso in modo che anche $\mu\beta+\nu$ sia positivo, e allora si avrà la (20); talchè noi possiamo dire di potere sempre applicare le formole (20) o (22) secondochè $\varphi(\beta)$ è positivo o negativo respettivamente. In tutte queste formole poi μ è un numero qualunque non inferiore a Λ, e potrà sempre esser preso $\mu=\Lambda$.

210. In modo simile si tratta il caso in cui essendo finito il limite inferiore λ dei rapporti incrementali di $\varphi(x)$ fra α e β, si vuole introdurre in calcolo questo limite λ.

Del resto poi volendo trovare alcune formole relative a questo caso si può osservare che se la funzione $\varphi(x)$ fra α e β ha effettivamente come supponiamo, un numero finito o infinito di massimi e minimi, il λ sarà negativo; e se invece della funzione $\varphi(x)$ prenderemo a considerare la funzione $\varphi_1=-\varphi(x)$, il limite superiore dei suoi rapporti incrementali sarà $-\lambda$, e a questa funzione $\varphi_1(x)$ potremo applicare le formole precedenti, e in parti-

colare le (20) e (22), intendendo però allora che μ sia un numero non inferiore a $-\lambda$, e ponendo φ_1 o $-\varphi$ al posto di φ.

Cambiando dunque in queste formole φ in $-\varphi$, e μ in $-\mu_1$ coll'intendere ora che μ_1 sia negativo e non superiore a λ, si troveranno subito le formole seguenti:

$$(23)\quad A\varphi(\alpha)+\mu_1(\beta-\alpha)(A-a)<\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx<a\varphi(\alpha)-\mu_1(\beta-\alpha)(A-a).$$

$$(24)\quad A\varphi(\alpha)+\left\{\mu_1(\beta-\alpha)-\varphi(\beta)\right\}(A-a)<\int_\alpha^x f(x)\varphi(x)dx<a\varphi(\alpha)-$$

$$-\left\{\mu_1(\beta-\alpha)-\varphi(\beta)\right\}(A-a)$$

la prima delle quali vale quando $\varphi(\beta)\leq 0$ e la seconda quando $\varphi(\beta)\geq 0$; e in queste formole, che evidentemente sono relative al caso che ora volevamo considerare, il μ_1 è un numero qualunque non superiore a λ, e si può prendere sempre $\mu_1=\lambda$.

In tutti questi casi poi si può notare che se $\varphi(x)$ ammette una derivata determinata e finita $\varphi'(x)$ fra α e β, λ e Λ sono respettivamente i limiti inferiore e superiore di questa derivata pei valori di x compresi nello stesso intervallo; e questo fà sì che le formole precedenti, che allora sono evidentemente applicabili, potranno tornare utilissime anche nei casi ordinarî pel calcolo approssimato degli integrali definiti.

211. Tornando ora a considerare i casi in cui $\varphi(x)$ fra α e β non và mai crescendo o non và mai decrescendo, si possono ottenere altri risultati importantissimi per mezzo del teorema del §. 204.

Si osservi perciò che quando da α a β ($\alpha<\beta$ o anche $\alpha>\beta$) la funzione $\varphi(x)$ non và mai crescendo e non è mai negativa, per l'applicazione della formola (9) basta che a e A siano respettivamente inferiori o superiori tanto poco quanto si vuole al minimo o al massimo dei valori dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ per x compreso fra α e β (α e β inclus.); e quindi *se m e* M *sono questi valori massimi*

e minimi dello stesso integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$, *sempre nella ipotesi che da* α *a* β *la funzione* $\varphi(x)$ *non sia mai negativa e non vada mai crescendo, si avrà:*

$$(25) \qquad m\varphi(\alpha) \leq \int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)\,dx \leq M\varphi(\alpha),$$

e in questa diseguaglianza a $\varphi(\alpha)$ *si potrà anche sostituire* $\varphi(\alpha+0)$ *o* $\varphi(\alpha-0)$ *secondochè* $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$.

212. Segue da ciò che, sotto la ipotesi che da α a β la funzione $\varphi(x)$ non vada crescendo e non cangi mai di segno, il rapporto $\frac{1}{\varphi(\alpha)}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx$ è compreso fra il minimo m e il massimo M dei valori che prende l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ quando x varia da α a β (α e β incl.); e quindi, osservando che quest'ultimo integrale, per essere una funzione continua di x fra α e β, *prende effettivamente* tutti i valori compresi fra il suo minimo e il suo massimo, si conclude anche che *se* $f(x)$ *è finita e atta alla integrazione nell'intervallo* (α, β), *e da* α *a* β $\varphi(x)$ *non è mai negativa e non và mai crescendo, si avrà*:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\alpha}^{x'} f(x)dx,$$

essendo x' *un valore determinato di* x *fra* α *e* β (α *e* β *inclus.*), *ovvero:*

$$(26) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{\alpha+\theta(\beta-\alpha)} f(x)\,dx,$$

essendo θ *un numero determinato compreso fra* 0 *e* 1 (*questi limiti inclusi*).

Nel caso poi che da α a β la funzione $\varphi(x)$ senza cangiar mai di segno non vada mai decrescendo, si osserverà che, siccome allora l'integrale $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\varphi(x)dx$ sarà nel caso dell'integrale precedente, si avrà:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta)\int_{\beta}^{x'} f(x)dx\,,$$

ove x' è un numero compreso fra α e β (α e β incl.), e si concluderà perciò che in questo caso si ha:

$$(27)\qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta)\int_{\alpha+\theta_1(\beta-\alpha)}^{\beta} f(x)dx\,,$$

con θ_1 compreso fra 0 e 1 (0 e 1 incl.); talchè si può ora asserire che, quando da α a β la funzione $\varphi(x)$ non cangia mai di segno e varia sempre in un senso o si mantiene costante, si avrà la formola (26) o la (27) secondochè da α a β la stessa $\varphi(x)$ in valore assoluto non và mai crescendo o non và mai decrescendo.

Si deve poi notare che nella formola (26) a $\varphi(\alpha)$ può anche sostituirsi $\varphi(\alpha+0)$ o $\varphi(\alpha-0)$ secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$, e nella (27) a $\varphi(\beta)$ si può sostituire $\varphi(\beta-0)$ o $\varphi(\beta+0)$ secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$; come si deve pure notare che queste formole (26) e (27) hanno una certa analogia colla formola (6) del §. 190; però mentre in questa ultima, delle due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, quella che resta sotto l'ultimo integrale deve avere sempre lo stesso segno nel corso della integrazione e l'altra funzione può anche avere un numero infinito di oscillazioni, nelle formole (26) e (27) invece delle due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ quella che resta sotto l'ultimo integrale può anche avere un numero infinito di cangiamenti di segno, o di oscillazioni, e l'altra funzione non deve fare alcuna oscillazione e conservare sempre lo stesso segno.

213. I risultati precedenti conducono ad una formola dovuta a Weierstrass che, senza porre alcuna limitazione rispetto al segno di $\varphi(x)$ fra α e β, comprende ad un tempo il caso in cui $\varphi(x)$ da α a β non và mai crescendo e quello in cui non và mai decrescendo.

Questa formola è la seguente:

$$(28)\qquad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{\alpha+\theta(\beta-\alpha)} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{\alpha+\theta(\beta-\alpha)}^{\beta} f(x)dx\,,$$

e noi per dimostrarla considereremo separatamente il caso in cui la funzione $\varphi(x)$ da α a β non và mai decrescendo e quello in cui non và mai crescendo.

Nel primo caso osserveremo che, siccome la funzione $\varphi(\beta)-\varphi(x)$ col passare di x da α a β non và mai crescendo, e non è mai negativa, per la formola (26) si avrà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(\beta)-\varphi(x)\}dx=\{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\}\int_\alpha^{x'} f(x)dx\,,$$

essendo x' un valore compreso fra α e β (α e β inclus.); e di quì si dedurrà subito la formola:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=\varphi(\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx+\varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)dx-\varphi(\beta)\int_\alpha^{x'} f(x)dx\,,$$

che evidentemente, coll'osservare che $\int_\alpha^\beta=\int_\alpha^{x'}+\int_{x'}^\beta$ si riduce a quella di Weierstrass.

Nel secondo caso poi si osserverà che la funzione $\varphi(\alpha)-\varphi(x)$ col passare di x da α a β non và mai decrescendo e non è mai negativa, e quindi applicando la formola (27), o anche applicando la formola (28) col sostituirvi $\varphi(\alpha)-\varphi(x)$ invece di $\varphi(x)$, pel qual caso la formola (28) stessa può dirsi già dimostrata, si troverà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\{\varphi(\alpha)-\varphi(x)\}dx=\{\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\}\int_{x'}^\beta f(x)dx\,,$$

con x' compreso fra α e β (α e β inclus.); e di quì si dedurrà subito la formola:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx=\varphi(\alpha)\int_\alpha^\beta f(x)dx-\varphi(\alpha)\int_{x'}^\beta f(x)dx+\varphi(\beta)\int_{x'}^\beta f(x)dx\,,$$

che si riduce pure alla formola di Weierstrass, la quale resta così dimostrata in tutti i casi.

A $\varphi(\alpha)$ poi e a $\varphi(\beta)$ anche nella formola di Weierstrass potremo sempre sostituire le quantità $\varphi(\alpha+0)$ e $\varphi(\beta-0)$, o le altre $\varphi(\alpha-0)$ e $\varphi(\beta+0)$, secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha<\beta$.

214. La formola di Weierstrass suppone come abbiamo detto che la funzione $\varphi(x)$ col passare di x da α a β resti costante o varii sempre in un senso. Quando invece questa funzione $\varphi(x)$ da α a β facesse un numero finito di oscillazioni, in modo cioè

che l'intervallo (α, β) si scomponesse in p intervalli (α_1, β_1), $(\beta_1, \beta_2), \ldots, (\beta_{p-1}, \beta)$ in ciascuno dei quali la funzione $\varphi(x)$ non facesse oscillazioni, e fosse continua almeno nei punti $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{p-1}$, allora siccome per la formola di Weierstrass si avrebbero le seguenti:

$$\int_\alpha^{\beta_1} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta_1)\int_{x_1}^{\beta_1} f(x)dx\,,$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta_1)\int_{\beta_1}^{x_2} f(x)dx + \varphi(\beta_2)\int_{x_2}^{\beta_2} f(x)\,dx\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{\beta_{p-1}}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\beta_{p-1})\int_{\beta_{p-1}}^{x_p} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{x_p}^{\beta} f(x)dx\,,$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sono valori compresi negli intervalli suindicati relativi a ciascuna oscillazione (gli est. incl.), si conclude subito che invece della (28) si avrebbe l'altra:

$$(29)\quad \int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta_1)\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \varphi(\beta_2)\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \\ + \ldots + \varphi(\beta)\int_{x_p}^{\beta} f(x)dx\,.$$

215. E nel caso infine che la funzione $\varphi(x)$ fra α e β facesse un numero infinito di oscillazioni, ma essendo però una funzione sempre continua e di prima specie, allora indicando con μ un numero non compreso fra i limiti inferiore e superiore λ e Λ degli estremi oscillatorii di $\varphi(x)$ fra α e β, e osservando che da α a β la funzione $\varphi(x)-\mu x$ non fà oscillazioni, per la formola di Weierstrass si vede subito che si avrà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{x_1}^{\beta} f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta xf(x)dx - \\ - \mu\alpha\int_\alpha^{x_1} f(x)dx - \mu\beta\int_{x_1}^{\beta} f(x)dx\,,$$

ove x_1 è un numero compreso fra α e β (α e β inclus.); e siccome,

sempre per la stessa formola, si ha:

$$\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \alpha\int_{\alpha}^{x_2} f(x)dx + \beta\int_{x_2}^{\beta} f(x)dx\,,$$

ove x_2 è un nuovo numero compreso fra α e β (α e β pure incl.), si conclude subito che *nel caso delle funzioni* $\varphi(x)$ *di prima specie, per ogni valore di* μ *non compreso fra i limiti inferiori e superiori degli estremi oscillatorii* λ *e* Λ *della stessa* $\varphi(x)$ ($\mu=\lambda$ *o* $\mu=\Lambda$ *incl.*) *si avrà la formola seguente:*

$$(30)\quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{x_1}^{\beta} f(x)dx - \mu(\beta-\alpha)\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\,,$$

essendo x_1 *e* x_2 *due numeri* determinati *compresi fra* α *e* β (α *e* β *incl.*), *il secondo dei quali* x_2 *può anche talvolta essere uguale al primo ma non dipende affatto dal valore che si prende per* μ.

216. In tutto ciò che precede abbiamo supposto che la funzione $f(x)$ che comparisce nell' integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ fosse sempre finita fra α e β. Ora supponiamo invece che $f(x)$ divenga infinita a uno o a tutti e due i limiti α e β, o per alcuni valori di x fra α e β; intendendo per ora con ciò di comprendere tanto il caso in cui in questi punti $f(x)$ è effettivamente infinita, qualunque siano del resto i valori che essa ha nei loro intorni, come anche il caso in cui coll' avvicinarsi indefinitamente di x agli stessi punti da una o da tutte e due le parti la funzione finisce per prendere *anche* valori numericamente maggiori di qualunque quantità data (§. 26), qualunque sia del resto il valore che la funzione stessa ha in quei punti; per modo che talvolta accadrà che un punto determinato x considerato come appartenente soltanto a uno dei suoi intorni a destra o a sinistra p. es. a quello a destra, figuri come un punto d' infinito di $f(x)$, mentre non figura più come tale quando si considera come appartenente soltanto all' intorno a sinistra.

Ora, ammettendo che la funzione $f(x)$ sia ancora atta alla integrazione in tutti gli intervalli nei quali è sempre finita, se

essa diverrà infinita soltanto per uno dei limiti p. es. per $x=\beta$ (α p. es. $<\beta$), indicando con ε una quantità differente da zero ma arbitrariamente piccola e positiva, si considererà l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ come il limite dell'integrale $\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx$ per $\varepsilon=0$; e se $f(x)$ diviene infinita a tutti e due i limiti α e β soltanto, o in un numero finito di punti fra α e β (α e β p. es. escl.) si considererà l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ come il limite respettivamente dell'integrale $\int_{\alpha+\varepsilon'}^{\beta-\varepsilon} f(x)dx$, o della somma:

$$\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)dx+\int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)dx+\ldots+\int_{\alpha_m+\varepsilon_m}^{\beta} f(x)dx\,,$$

quando le quantità ε e ε', o le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ e le $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots \varepsilon'_m$ tendono a zero per valori positivi secondo una legge qualunque; e la funzione $f(x)$ si considererà come *atta alla integrazione definita* fra α e β soltanto nel caso in cui la quantità di cui si ha da cercare il limite abbia un limite determinato e finito. Invece l'integrale stesso $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ sarà infinito se uno o più degli integrali che figurano nella quantità di cui si ha da cercare il limite tenderanno all'infinito nello stesso senso, e gli altri avranno limiti determinati e finiti, o almeno si comporteranno in modo che nessuno di essi abbia per limite l'infinito o prenda valori infinitamente grandi e di segno opposto a quello degli integrali infiniti; e sarà invece indeterminato in tutti gli altri casi.

217. Nel caso poi che $f(x)$ divenga infinita fra α e β ($\alpha<\beta$) in un numero infinito di punti che costituiscano un gruppo di prima specie e del prim'ordine, allora indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ i punti del gruppo derivato G' presi in ordine crescente, e supposti p. es. tutti interni all'intervallo (α, β), e ritenendo che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione in tutti quelli intervalli che non comprendono i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ (e che contengono quindi

soltanto un numero finito di punti di G), si definirà l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ col dire che esso è il limite della somma:

$$\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \ldots + \int_{\alpha_m+\varepsilon'_m}^{\beta} f(x)dx$$

quando le ε e ε' sono quantità positive che tendono a zero con una legge qualunque.

Nel caso poi che $f(x)$ divenga infinita fra α e β in un gruppo G di punti di prima specie e di second'ordine, indicando allora con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ i punti del secondo gruppo derivato G'' in ordine crescente, e ritenendo al solito che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione in tutti quelli intervalli che non comprendono i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ (e che contengono quindi soltanto dei punti di G che appartengono a gruppi del prim'ordine), si definirà l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ col dire che esso è il limite della somma:

$$\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \ldots + \int_{\alpha_m+\varepsilon'_m}^{\beta} f(x)dx\,,$$

quando le ε e ε' sono quantità positive che tendono a zero; e in modo simile si definirà successivamente l'integrale stesso quando $f(x)$ divenga infinito fra α e β in un gruppo di punti di prima specie e degli ordini 3°, 4°, ..., ν°; talchè non resta ora che il caso in cui $f(x)$ divenga infinita in un gruppo di punti di seconda specie fra α e β, il qual caso però non merita di essere considerato, e s'intenderà perciò sempre escluso.

Per abbreviare le notazioni, d'ora innanzi per rappresentare una somma d'integrali relativi alla stessa funzione, come p. es. la somma:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \ldots + \int_p^q f(x)dx$$

useremo il simbolo:

$$\left(\int_a^b + \int_c^d + \ldots + \int_p^q\right) f(x)dx\,.$$

218. Definiti gli integrali anche nei casi ora indicati in cui la funzione $f(x)$ diviene infinita fra α e β, non si può lasciare di osservare che quando questa funzione $f(x)$ *sia effettivamente* infinita in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) o in un gruppo qualunque di punti di prima specie senza però che il suo valore numerico vada mai crescendo oltre ogni limite quando ci si avvicina indefinitamente da una parte o dall'altra ai punti stessi $a_1, a_2, \ldots$ nei quali è infinita (*infiniti isolati*), allora considerando successivamente il caso in cui questi punti $a_1, a_2, \ldots$ sono in numero finito e quello in cui essi costituiscono un gruppo di prima specie e degli ordini 1°, 2°, 3°,.... respettivamente, si troverà subito, per la definizione, che il valore dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ sarà quello stesso che si avrebbe quando in quei punti $a_1, a_2, \ldots$ la funzione $f(x)$ avesse valori finiti qualunque; talchè noi potremo sempre escludere dalle nostre considerazioni questo genere d'infiniti che in sostanza il più di sovente, non sono altro che discontinuità di quelle che possono togliersi mutando il valore della funzione nei punti corrispondenti.

Neppure poi si deve lasciare di notare che, per quanto i punti dei gruppi derivati di un gruppo G possano non appartenere al gruppo G stesso (§. 13), nel caso nostro però, per la natura dei punti che abbiamo detto di considerare (§. 216) come infiniti di $f(x)$, i punti dei gruppi derivati di quello che in certi casi sarà formato dai punti di infinito di $f(x)$ apparterranno *tutti* anche a questo primo gruppo, e figureranno sempre in conseguenza come punti d'infinito della funzione stessa $f(x)$.

219. Pel caso che la funzione $f(x)$ divenisse infinita soltanto in un punto a *interno* all'intervallo d'integrazione (α, β), *Cauchy*, nell'ipotesi p. es. di $\alpha<\beta$, chiamava *valore principale* dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ il limite della somma $\left(\int_\alpha^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^\beta\right) f(x)dx$ per ε positivo e tendente a zero; quindi, adottando noi pure questa denominazione, e osservando che la somma $\left(\int_\alpha^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon'}^\beta\right) f(x)dx$

può benissimo non avere un limite determinato quando ε e ε' tendono a zero indipendentemente l'una d'altra, e averlo invece quando fra ε e ε' sussistono certe relazioni, e in particolare quando $\varepsilon'=\varepsilon$, si potrà dire evidentemente che se l'integrale dato $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ non è determinato, il suo valore principale però può benissimo esserlo; e se lo stesso integrale ha un valore determinato finito o infinito, il suo valore coincide sempre col valore principale.

220. Lo stesso *Cauchy* poi, limitandosi alle funzioni $f(x)$ che fra α e β (α e β incl.) divengono infinite soltanto in un numero infinito di punti, chiamava integrali definiti singolari, per ognuno di questi punti a (supposto p. es. interno all'intervallo (α, β)), l'uno e l'altro degli integrali $\int_{a-\varepsilon}^{a-k_1\varepsilon} f(x)dx$, $\int_{a+k_2\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)dx$, ove k_1 e k_2 sono numeri fissi positivi qualunque, e ε è pure positivo ma arbitrariamente piccolo e tale che fra il massimo e il minimo dei numeri $a-\varepsilon$, $a-k_1\varepsilon$, $a+k_2\varepsilon$, $a+\varepsilon$ non vi cada che il punto a di punti nei quali $f(x)$ diviene infinita.

Quì però modificheremo il concetto di Cauchy; e supponendo ancora dapprima che fra α e β la funzione $f(x)$ divenga infinita soltanto in un numero finito di punti, chiameremo ***integrali definiti singolari*** per ognuno di questi punti a *interni* all'intervallo (α, β) ambedue gli integrali $\int_{a-\varepsilon}^{a-\delta} f(x)dx$, $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)dx$, ove ε è un numero diverso da zero positivo e arbitrariamente piccolo, e δ è un altro numero qualunque diverso da zero e positivo e inferiore a ε, e di più ε è tale che negli intervalli $(a-\varepsilon, a-\delta)$, $(a+\delta, a+\varepsilon)$ non cade nessuno dei punti nei quali $f(x)$ diviene infinita; e nel caso poi che il punto a in cui $f(x)$ diviene infinita sia uno degli estremi dell'intervallo (α, β), p. es. l'estremo β, si avrà ancora un integrale definito singolare che, se p. es. $\alpha<\beta$, sarà l'integrale $\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)dx$, ove ε e δ hanno i significati stabiliti poc'anzi.

Supponendo poi che la funzione $f(x)$ divenga infinita in un gruppo di punti G di prima specie e del prim'ordine, indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ i punti del gruppo derivato G' (punti-limiti di G) i quali (§. 218) saranno anch'essi punti d'infinito di G.

Siccome ogni punto differente da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ non avrà intorno a sè un numero infinito di punti di G, è chiaro che per ciascuno dei punti differenti da $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ in cui la funzione $f(x)$ diviene infinita si potranno ancora formare degli integrali definiti singolari come quelli indicati sopra. Oltre a questi però, gioverà ora considerare anche per ciascuno dei punti α_s uno o due integrali della stessa forma dei precedenti $\int_{\alpha_s-\varepsilon_s}^{\alpha_s-\delta_s} f(x)dx$, $\int_{\alpha_s+\delta_s}^{\alpha_s+\varepsilon_s} f(x)dx$ secondochè α_s sarà un estremo dell'intervallo (α, β) o sarà un punto interno; e siccome questi ultimi integrali sono distinti dai precedenti, inquantochè il numero degli infiniti di $f(x)$ che cadranno in uno almeno dei due intervalli d'integrazione $(\alpha_s-\varepsilon_s, \alpha_s-\delta_s)$, $(\alpha_s+\delta_s, \alpha_s+\varepsilon_s)$ relativi agli integrali che corrispondono a α_s, sebbene sempre finito, andrà crescendo indefinitamente coll'impiccolire sempre più di δ_s, noi chiameremo questi nuovi integrali *integrali definiti singolari del prim'ordine*, dicendo però allora *integrali definiti singolari di ordine zero* quelli considerati sopra.

Similmente se la funzione $f(x)$ diviene infinita in un gruppo di punti G di prima specie e del secondo ordine, e $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ sono i punti del secondo gruppo derivato G'', allora rispetto ai punti di G e a quelli del primo gruppo derivato G' che non coincidono con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ potremo formare degli integrali definiti singolari del prim'ordine e altri dell'ordine zero; e rispetto poi ai punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ potremo formare dei nuovi integrali definiti singolari che chiameremo *di second'ordine*, come p. es. i due $\int_{\beta_s-\varepsilon_s}^{\beta_s-\delta_s} f(x)dx$, $\int_{\beta_s+\delta_s}^{\beta_s+\varepsilon_s} f(x)dx$ relativi al punto β_s (supposto p. es. che β_s sia un punto interno all'intervallo (α, β)); e coll'impiccolire di δ_s $(\delta_s<\varepsilon_s)$, in uno almeno dei due intervalli d'integrazione corrispondenti $(\beta_s-\varepsilon_s, \beta_s-\delta_s)$, $(\beta_s+\delta_s, \beta_s+\varepsilon_s)$ vi verrà sempre a cadere

un numero infinito di punti di G, e vi verranno a cadere dei punti del gruppo derivato G′ il cui numero, sebbene sempre finito, andrà anche crescendo indefinitamente all'impiccolire ognor più di δ_s.

In modo simile si trova che se $f(x)$ diviene infinita in un gruppo di punti G di prima specie e del terz'ordine, si avranno anche degli integrali definiti singolari del terz'ordine; e così continuando si vede che in generale se $f(x)$ diviene infinita in un gruppo di punti G di prima specie e dell'ordine ν, si avranno integrali definiti singolari degli ordini 1°, 2°, 3°,... fino all'ordine ν° inclusive.

221. Premesse queste definizioni, è facile vedere che: *se una funzione $f(x)$ diviene infinita fra α e β in punti a costituenti un gruppo finito o infinito G di prima specie, onde essa sia atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), è necessario e sufficiente che soddisfi alle ordinarie condizioni d'integrabilità in tutti gli intervalli nei quali è sempre finita, e nel tempo stesso i suoi integrali definiti singolari dei varii ordini* $\int_{a\pm\delta}^{a\pm\varepsilon} f(x)dx$ $(\delta<\varepsilon)$ *abbiano per limite zero coll'avvicinarsi sempre più dei loro estremi* $a-\varepsilon$, $a-\delta$, *e* $a+\delta$, $a+\varepsilon$ *al punto singolare corrispondente* a.

Si osservi infatti che, per quanto si disse al §. 216 e pel teorema del §. 22, la proprietà enunciata sussiste evidentemente nel caso in cui $f(x)$ fra α e β diviene infinita soltanto in un numero finito di punti; talchè, onde dimostrarla in generale basterà far vedere che, ammesso che sussista pel caso dei gruppi di ordine uguale o inferiore a $\nu-1$, essa sussisterà altresì nel caso che G sia un gruppo dell'ordine ν.

Ora se il gruppo G è dell'ordine ν, e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sono i punti successivi del gruppo derivato di ordine ν presi in ordine crescente, considerando p. es. l'integrale $\int_{\alpha_i+\varepsilon_i}^{\alpha_{i+1}-\varepsilon_{i+1}} f(x)dx$ ove ε_i e ε_{i+1} sono positivi, s'intende subito che se esso ha un limite determinato e finito per ε_i e ε_{i+1} tendenti a zero, gli integrali definiti singolari dell'ordine ν $\int_{\alpha_i-\delta_i}^{\alpha_i-\varepsilon_i} f(x)dx$, $\int_{\alpha_{i+1}-\varepsilon_{i+1}}^{\alpha_{i+1}-\delta_{i+1}} f(x)dx$, ove $0<\delta_i<\varepsilon_i$,

$0<\delta_{i+1}<\varepsilon_{i+1}$, avranno per limite zero col tendere a zero di ε_i e ε_{i+1}.

Viceversa, se ciò accade per gli integrali singolari dell'ordine ν e per quelli di ordine inferiore, osservando che l'integrale $\int_{\alpha_i+\varepsilon_i}^{\alpha_{i+1}-\varepsilon_{i+1}} f(x)dx$ è esteso a un intervallo $(\alpha_i+\varepsilon_i, \alpha_{i+1}+\varepsilon_{i+1})$ nel quale cadono soltanto punti di gruppi di ordine inferiore a ν, e tenendo conto della ipotesi ammessa che il teorema sia già stato riconosciuto giusto pei gruppi di ordine uguale o inferiore a $\nu-1$, si vedrà subito che per ogni sistema di valori positivi di ε_i e ε_{i+1} l'integrale stesso avrà sempre un valore determinato e finito. Si aggiunge che, in conseguenza della ipotesi che ora facciamo che anche gli integrali definiti singolari di ordine ν abbiano per limite zero, le differenze fra i valori che si otterranno per l'integrale $\int_{\alpha_i+\varepsilon_i}^{\alpha_{i+1}-\varepsilon_{i+1}} f(x)dx$ al successivo impiccolire di ε_i e ε_{i+1} finiranno per esser sempre numericamente inferiori a quel numero che più ci piace, e in conseguenza col tendere a zero di ε_i e ε_{i+1} questi valori avranno anche un limite determinato e finito (§. 22); dunque evidentemente in forza della definizione che si ha in questo caso per l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, si può ora asserire che se la proprietà enunciata sopra sussiste pel caso dei gruppi G di ordine uguale o inferiore a $\nu-1$, essa sussiste anche per quelli dell'ordine ν; e quindi la proprietà stessa può dirsi ora dimostrata in generale.

Per brevità di linguaggio, riferendoci ai punti nei quali $f(x)$ diviene infinita (o ai loro punti-limiti, che per noi del resto sono sempre punti d'infinito), diremo talvolta che una *funzione è atta alla integrazione negli intorni a destra di questi punti o in quelli a sinistra* quando gli integrali definiti singolari corrispondenti avranno per limite zero coll'impiccolire indefinito degli stessi intorni; e così onde la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e β sarà necessario e sufficiente che, oltre a essere atta alla integrazione negli intervalli nei quali è finita, lo sia anche negli intorni a destra e a sinistra dei punti nei quali essa diviene infinita.

222. Al modo stesso che nelle serie insieme alle somme di un numero qualunque di termini che seguono l'n^o si considera anche quella quantità limite che è conosciuta sotto il nome di resto della serie, così nel caso attuale, insieme agli integrali definiti singolari relativi a ogni punto singolare a, che sia p. es. interno all'intervallo, avviene talvolta di dovere considerare anche la quantità limite $\int_{a-\varepsilon_1}^{a+\varepsilon} f(x)dx$, cioè l'integrale esteso a un intorno arbitrariamente piccolo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon)$ del punto a, il quale integrale non è altro che il limite della somma $\left(\int_{a-\varepsilon_1}^{a-\delta_1} + \int_{a+\delta}^{a+\varepsilon}\right) f(x)dx$ per $\delta_1 = +0$ e $\delta = +0$. Anche a questo integrale perciò noi daremo un nome speciale, chiamandolo il *contributo dell'intorno di* a, e di un ordine determinato dalla natura del punto a; e, quando a sarà interno all'intervallo (α, β), lo potremo sempre spezzare in due integrali $\int_{a-\varepsilon_1}^{a} f(x)dx$, $\int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)dx$ che saranno respettivamente i *contributi degli intorni a destra o a sinistra di a.*

Con queste denominazioni poi, essendo sempre $f(x)$ una funzione che diviene infinita fra α e β in punti che costituiscono un gruppo finito o infinito G di prima specie, si potrà anche asserire che onde essa sia atta alla integrazione fra α e β è necessario e sufficiente che soddisfi alle condizioni d'integrabilità in tutti gli intervalli nei quali è finita, e che per ogni punto d'infinito, i contributi relativi (dei differenti ordini) coll'impiccolire indefinitamente degli intorni corrispondenti, abbiano tutti per limite zero.

Rispetto poi ai punti c dell'intervallo (α, β) che non corrispondono a punti d'infinito di $f(x)$, occorrerà pure qualche volta di dovere considerare i contributi $\int_{c-\varepsilon_1}^{c+\varepsilon} f(x)dx$ relativi ai loro intorni, come anche gli integrali $\int_{c\pm\delta}^{c\pm\varepsilon} f(x)dx$ $(0<\delta<\varepsilon)$ analoghi agli integrali definiti singolari; e questi contributi, come questi ultimi

integrali $\int_{c\pm\delta}^{c\pm\varepsilon} f(x)dx$, evidentemente avranno per limite zero coll'impiccolire indefinito degli intorni corrispondenti $(c-\varepsilon_1, c+\varepsilon)$, o dei numeri ε e δ.

223. Le considerazioni precedenti mettono in chiaro come i risultati 1.° 2.° 4.° 9.° 10.° 11.° 12.° 13.° 14.° e 16.° del §. 190, continuano a sussistere anche quando tutte o alcune delle funzioni che vi figurano, pure restando atte alla integrazione nell'intervallo (α, β), divengono infinite fra α e β in punti che costituiscono un gruppo finito o infinito G di prima specie.

Degli altri risultati poi dello stesso §. 190, alcuni cessano naturalmente di sussistere, e altri soffrono soltanto delle eccezioni; però noi non ci fermeremo ora a esaminarli tutti particolarmente, e ci limiteremo a mostrare quali modificazioni debbano portarsi ai risultati 5.° 6.° 17.° 18.° e 19.° quando si suppone che tutte o alcune delle funzioni che vi figurano, pur restando sempre atte alla integrazione nell'intervallo (α, β), divengono infinite in alcuni punti fra α e β.

224. Premettiamo perciò l'osservazione che la prima parte del risultato 15.° del §. 190 non si estende completamente al caso in cui la funzione $f(x)$, pur essendo atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), diviene infinita in questo intervallo in punti costituenti un gruppo finito o infinito G di prima specie; per modo che la condizione che la funzione $f_1(x)$ formata dai valori assoluti di $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e β non è più una necessaria conseguenza dell'altra che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione nello stesso intervallo.

Però se la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione fra α e β, la funzione $f_1(x)$ dei suoi valori assoluti lo sarà pure in tutti gli intervalli fra α e β nei quali $f(x)$ è finita (§. 190. 15.°), talchè per decidere se essa è atta o nò alla integrazione *anche* nell'intervallo totale (α, β) basterà esaminare i suoi integrali definiti singolari relativi ai varii punti d'infinito, e vedere se essi tendono o nò a zero coll'impiccolire indefinitamente degli intorni ad essi corrispondenti (§. 221), cioè basterà cercare se la funzione stessa $f_1(x)$ sia atta o nò alla integrazione definita negli intorni dei punti d'infinito di $f(x)$.

Invece quando si abbia per dato che la funzione $f_1(x)$ dei valori assoluti di $f(x)$ è atta alla integrazione nell'intervallo totale (α, β), onde essere sicuri che tale è pure $f(x)$ basterà esaminare se essa è atta o nò alla integrazione in tutti gli intervalli fra α e β nei quali è sempre finita, ciò che si farà applicando i teoremi generali dei §§. 184 e seg.

225. Ciò premesso, incominciamo dall'estendere in parte il risultato 17.° del §. 190, dimostrando cioè che: *se $f(x)$ è una funzione che fra α e β (p. es. $\alpha<\beta$) non supera mai in valore assoluto un numero finito e positivo* L; *e $\varphi(x)$ è una funzione che, anche se diviene infinita fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito* G *di prima specie, è atta alla integrazione nell'intervallo* (α, β), *e tali sono pure il prodotto $f(x)\varphi(x)$ e la funzione $\varphi_1(x)$ dei valori assoluti di $\varphi(x)$, si avrà in valore assoluto:*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx \leq \mathrm{L}\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx\,,$$

talchè in particolare se $f(x)=1$ *sarà:* $\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \leq \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx$, *quando $\varphi(x)$ si mantiene atta alla integrazione fra α e β anche riducendola ai suoi valori assoluti.*

Ricordando infatti che questa proprietà si dimostrò già al §. 190. 17.° pel caso che $\varphi(x)$ fosse sempre finita fra α e β, si vede subito che se $\varphi(x)$ diviene infinita in un numero finito di punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ pure fra α e β, e si ha p. es. $\alpha<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_m<\beta$, sarà in valore assoluto:

$$\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1} f(x)\varphi(x)dx \leq \mathrm{L}\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1}\varphi_1(x)dx \leq \mathrm{L}\int_\alpha^{\alpha_1}\varphi_1(x)dx\,,$$

$$\int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} f(x)\varphi(x)dx \leq \mathrm{L}\int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2}\varphi_1(x)dx \leq \mathrm{L}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi_1(x)dx\,,$$

. . . .

e perciò anche:

$$\left(\int_\alpha^{\alpha_1-\varepsilon_1}\int_{\alpha_1+\varepsilon'_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2}+\ldots+\int_{\alpha_m+\varepsilon'_m}^{\beta}\right) f(x)\varphi(x)dx \leq \mathrm{L}\int_{\alpha_1}^{\beta}\varphi(x)dx\,,$$

e quindi al limite sarà:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx \leq L\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx\,,$$

talchè la proprietà enunciata può dirsi intanto dimostrata per tutti gli intervalli (α, β) nei quali $\varphi(x)$ diviene infinita in un numero finito di punti.

Ammettendo ora dimostrata questa proprietà pel caso che $\varphi(x)$ divenga infinita fra α e β in gruppi di punti dell'ordine $(\nu-1)$ o di ordine inferiore, si passa subito al caso dei gruppi di punti di ordine ν, giacche se allora $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono i punti del gruppo derivato ν^o, si avranno ancora le formole precedenti, le quali daranno sempre:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx \leq L\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)dx\,;$$

talchè la proprietà enunciata può dirsi ora dimostrata in generale.

226. Valendosi ora della proprietà dimostrata si trova subito un caso in cui il teorema 5.° del §. 190 è suscettibile di estensione, poichè si dimostra che: *se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni che, quand'anche divengano infinite fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, sono atte alla integrazione nell'intervallo (α, β) e non divengono mai infinite insieme* (*), *anche il loro prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione in questo intervallo tutte le volte che le funzioni $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$ dei valori assoluti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano atte esse pure alla integrazione fra α e β.*

Per dimostrare questo teorema osserviamo dapprima che se, come supponiamo, $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono atte alla integrazione fra α e β, il loro prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà pure atto alla integrazione in tutti gli intervalli nei quali $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono finite (§. 190. 5.°), e quindi per avere dei casi in cui esso è atto alla integrazione *anche*

(*) Questa condizione, per quanto si è detto al §. 218, nel caso che $f(x)$ e $\varphi(x)$ fra α e β divengano infinite in punti costituenti due gruppi infiniti G e G_1 di prima specie, esclude anche che alcuni punti-limiti di G coincidano con alcuni punti-limiti di G_1, perchè questi punti-limiti sono sempre punti d'infinito, ec....

nell'intervallo totale (α, β) basterà esaminare i suoi integrali definiti singolari (§. 221).

Per questo, ammettiamo dapprima che la funzione $\varphi(x)$ divenga infinita soltanto in un numero finito di punti fra α e β, e lo stesso accada della funzione $f(x)$, o questa sia sempre finita.

Allora, se si suppone che a sia un punto d'infinito di $f(x)$ o di $\varphi(x)$ fra α e β (α e β incl.), p. es. di $\varphi(x)$, l'integrale definito singolare $\int_{a\pm\delta}^{a\pm\varepsilon} \varphi_1(x)dx$ per ε e δ sufficientemente piccoli $(0<\delta<\varepsilon)$ si manterrà sempre numericamente inferiore a un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo σ, e al tempo stesso per la ipotesi ammessa che le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ non divengano mai infinite insieme, in tutto l'intervallo d'integrazione $(a\pm\delta, a\pm\varepsilon)$ la funzione $f(x)$ si manterrà sempre numericamente inferiore a un numero γ; dunque, poichè nell'intervallo $(a\pm\delta, a\pm\varepsilon)$ le funzioni $\varphi(x)$ e $f(x)$ sono sempre finite e quindi il loro prodotto è atto all'integrazione nello stesso intervallo, pel teorema del paragrafo precedente si avrà in valore assoluto $\int_{a\pm\delta}^{a\pm\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx<\gamma\sigma$; e lo stesso accadrà per gli integrali definiti singolari relativi agli altri punti d'infinito di $f(x)$ o di $\varphi(x)$ fra α e β, talchè il teorema enunciato sopra può dirsi intanto dimostrato pel caso che $f(x)$ e $\varphi(x)$ abbiano soltanto un numero finito d'infiniti fra α e β.

Per dimostrare ora questo teorema in generale, ammettiamo al solito che esso sia già stato dimostrato pel caso che $f(x)$ o $\varphi(x)$ divengano infinite fra α e β in punti che costituiscono gruppi di ordine uguale o inferiore a $\nu-1$, e facciamo vedere che esso sussisterà ancora nel caso che per $f(x)$ o per $\varphi(x)$ questi punti costituiscano gruppi di ordine ν.

Supponiamo perciò che $\varphi(x)$ divenga infinita in un gruppo di punti di ordine ν, e siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ i punti del ν^o gruppo derivato, e $f(x)$ sia sempre finita o divenga infinita in un gruppo di punti che sia tutt'al più anch'esso dell'ordine ν, e in quest'ultimo caso siano $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ i punti del ν^o gruppo derivato.

Allora in tutti gli intervalli che non contengono i punti

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ o i punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione; quindi basterà occuparsi degli integrali definiti singolari di ordine ν relativi ai punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ e ai punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.

Ora se a è uno di questi punti, p. es. uno dei punti α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$, l'integrale definito singolare $\int_{a\pm\delta}^{a\pm\varepsilon} \varphi_1(x)dx$ per ε e δ sufficientemente piccoli sarà sempre numericamente inferiore a un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo σ; e per le ipotesi contenute nell'enunciato del teorema la funzione $f(x)$ nell'intervallo $(a\pm\delta, a\pm\varepsilon)$ sarà sempre numericamente inferiore a un numero finito γ, giacchè altrimenti se non vi fosse un intorno di a nel quale $f(x)$ è sempre inferiore a un numero finito, il punto a figurerebbe come un infinito anche di $f(x)$ (§§. 216 e 218), e in esso le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ diverrebbero infinite insieme; dunque, poichè, per quanto piccoli siano δ e ε, fra $a\pm\delta$ e $a\pm\varepsilon$ il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è sempre atto all' integrazione perchè i punti d'infinito di $\varphi(x)$ che cadono nell'intervallo $(a\pm\delta, a\pm\varepsilon)$ appartengono tutti a un gruppo dell'ordine $\nu-1$, applicando il teorema del paragrafo precedente, si trova ancora che: $\int_{a\pm\delta}^{a\pm\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx < \gamma\sigma$, e quindi il teorema enunciato sopra può dirsi ora dimostrato in tutti i casi.

Farò notare che quando una delle due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, p. es. $f(x)$, sia sempre finita fra α e β, la condizione posta nell'enunciato del teorema che la funzione $f_1(x)$ dei suoi valori assoluti sia atta alla integrazione nell'intervallo (α, β) si rende evidentemente inutile. In questo caso del resto essa è sempre soddisfatta da per se (§. 190. 15°).

Oltre a ciò poi si può notare che il teorema dimostrato si estende evidentemente anche al caso del prodotto di un numero finito di funzioni che soddisfino tutte alle condizioni che abbiamo poste sopra per le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$.

227. Osserviamo ora che secondo quanto abbiamo detto al §. 224, quando le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ che figurano nell'enunciato

del teorema del paragrafo precedente sono atte alla integrazione fra α e β, onde essere sicuri che tali sono pure le funzioni dei loro valori assoluti $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$, basta verificare che queste sono atte alla integrazione negli intorni dei punti d'infinito di $f(x)$ o di $\varphi(x)$ respettivamente.

Merita poi di essere notato che il *teorema del paragrafo precedente sulla integrabilità del prodotto $f(x)\varphi(x)$ continua a sussistere anche quando la condizione d'integrabilità delle funzioni $f_1(x)$ o $\varphi_1(x)$ dei valori assoluti di $f(x)$ e $\varphi(x)$ in alcuni punti d'infinito $a_1, a_2, \ldots, a_m$ non è soddisfatta o si è incerti, purchè però questi punti speciali $a_1, a_2, \ldots, a_m$ siano in numero finito, e in quelli dei loro intorni, a destra o a sinistra, nei quali la indicata circostanza si presenta (quando questi intorni siano ridotti sufficientemente piccoli) la funzione corrispondente $f(x)$ o $\varphi(x)$ non abbia altri infiniti che quello che cade nel punto singolare, e l'altra funzione non faccia oscillazioni o almeno le venga a perdere tutte togliendovi o aggiungendovi una conveniente funzione di primo grado* (§. 134).

Supponiamo infatti che a sia uno dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_m$, e che per esso la indicata particolarità si presenti per la funzione $f_1(x)$ in uno o in tutti e due gli intorni a destra o a sinistra di a, p. es. nell'intorno a destra $(a, a+\varepsilon)$.

Allora, per ε e δ sufficientemente piccoli ($\delta<\varepsilon$), si avrà in valore assoluto $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)dx<\sigma$, essendo σ un numero dato positivo e arbitrariamente piccolo; quindi, se per ε sufficientemente piccolo la funzione $\varphi(x)$ fra a e $a+\varepsilon$ non farà oscillazioni, pel teorema del §. 207 si avrà, pure in valore assoluto: $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx<2\sigma\gamma_0$, essendo γ_0 il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ fra a e $a+\varepsilon$; e perciò il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione anche nell'intorno a destra di a.

Se poi, per quanto piccolo si prenda ε, $\varphi(x)$ fà un numero infinito di oscillazioni fra a e $a+\varepsilon$, ma, almeno quando ε è ridotto sufficientemente piccolo, essa le viene a perdere tutte aggiungen-

dovi una conveniente funzione di primo grado $\mu x+\nu$, allora in valore assoluto si avranno le diseguaglianze:

$$\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\{\varphi(x)+\mu x+\nu\}dx<2\gamma_1\sigma,\ \int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)(\mu x+\nu)dx<2\gamma_2\sigma,$$

essendo γ_1 e γ_2 i limiti superiori dei valori assoluti di $\varphi(x)+\mu x+\nu$ e $\mu x+\nu$ fra a e $a+\varepsilon$; quindi, in valore assoluto, si avrà anche: $\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx<2\sigma(\gamma_1+\gamma_2)$, e il prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà ancora atto alla integrazione nell'intorno a destra di a.

Risultati simili si hanno per tutti gli intorni dei punti a_1, $a_2,\ldots, a_m$ nei quali si presentano le indicate particolarità; quindi, poichè evidentemente si può intendere scomposto l'intervallo totale (α, β) in un numero finito d'intervalli che comprendano i punti $a_1, a_2,\ldots, a_m$ e quei loro intorni nei quali si hanno le singolarità e non comprendano altri punti d'infinito di $f(x)$, o di $\varphi(x)$, e in un altro numero pure finito d'intervalli per ciascun dei quali sia pienamente applicabile il teorema del paragrafo precedente, il teorema enunciato sopra resta ora evidentemente dimostrato.

228. In particolare dunque si può ora affermare che *se $\varphi(x)$ è una funzione che fra α e β è sempre finita e non fà oscillazioni o ne fà soltanto un numero finito, e $f(x)$ è un altra funzione che, quand'anche divenga infinita in un numero finito di punti fra α e β, è atta alla integrazione in questo intervallo (α, β), anche la funzione prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atta alla integrazione nello stesso intervallo;* giacchè per quanto si disse al §. 187. 6.°, tale sarà pure anche la funzione $\varphi(x)$, e quindi saremo appunto nel caso considerato sopra.

229. Servendosi ora dei teoremi dimostrati si estende anche il teorema 6.° del §. 190 relativo al quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ poichè si dimostra facilmente che: *se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni che fra α e β divengono infinite tutt'al più in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, e la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione*

nell'intervallo (α, β), *mentre la funzione* $\varphi(x)$ *è pure atta alla integrazione nello stesso intervallo, o anche soltanto in quelle porzioni di esso nelle quali è finita;* allora *anche il loro quoziente* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *sarà atto alla integrazione nello stesso intervallo* (α, β) *tutte le volte che la funzione denominatore* $\varphi(x)$ *si mantiene sempre discosta da zero più di una quantità determinata* λ, *e al tempo stesso la funzione numeratore* $f(x)$ *negli intorni dei suoi punti d'infinito si mantiene atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti, o se vi sono alcuni di questi punti a destra o a sinistra dei quali ciò non si verifica o è incerto, essi sono in numero finito e nei loro intorni corrispondenti a destra o a sinistra la funzione denominatore* $\varphi(x)$ *non fa oscillazioni, o almeno la sua funzione inversa* $\frac{1}{\varphi(x)}$ *le viene a perdere tutte aggiungendovi o togliendovi alcune funzioni convenienti di primo grado.*

Sotto queste ipotesi infatti la funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$ sarà sempre finita fra α e β, e quindi negli intorni dei punti nei quali $\varphi(x)$ è infinita gli integrali definiti singolari corrispondenti della funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$ tenderanno evidentemente a zero coll'impiccolire degli stessi intorni, mentre, pel teorema 6.° del §. 190, negli intervalli nei quali $\varphi(x)$ è finita la stessa funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$ sarà atta alla integrazione. Ne segue che la funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$ sarà evidentemente atta alla integrazione in tutto l'intervallo (α, β); e quindi, osservando che se in un dato intervallo una funzione $\varphi(x)$ non fà oscillazioni, lo stesso evidentemente accade della sua funzione inversa $\frac{1}{\varphi(x)}$, e tenendo conto delle ipotesi che abbiamo poste in fine dell'enunciato, pei teoremi dei paragrafi precedenti si conclude subito che il prodotto delle funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{\varphi(x)}$ è atto anch'esso all'integrazione nell'intervallo (α, β); e questo dimostra evidentemente il teorema.

Farò notare che se la funzione denominatore $\varphi(x)$ in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie fosse uguale a zero, o almeno avvenisse che avvicinandosi indefinitamente agli stessi punti, prendesse valori numericamente inferiori a qualunque quantità data il teorema ora dimostrato potrebbe continuare a sussistere, ma soltanto sotto certe condizioni; e così p. es. esso sussisterebbe ancora quando si ponesse per condizione che questi punti fossero distinti da quelli d' infinito del numeratore $f(x)$, e nei loro intorni la funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$ restasse atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti, ec.

230. Valendosi ancora del teorema del §. 226 si vede subito che i risultati 17.°, 18.° e 19.° del §. 190 continuano a sussistere in tutte le loro parti anche quando, tenute ferme tutte le altre condizioni, si ammette che la funzione ivi indicata con $\varphi(x)$, pur restando atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), possa diventare infinità fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, purchè nel caso del risultato 17.° si ponga al tempo stesso come dato che anche la funzione $\varphi_1(x)$ dei valori assoluti di $\varphi(x)$ sia atta alla integrazione nell'intervallo (α, β); talchè gli studj che avevamo detto di fare al §. 223 possono ora dirsi completi.

231. Anche i risultati ottenuti ai §§. 191 e seg. fino al §. 203 inclus. possono estendersi con poche modificazioni al caso in cui la funzione $f(x)$ diviene infinita fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, e resta atta alla integrazione nell'intervallo (α, β).

Si osservi infatti che anche in questo caso, se x è un valore qualunque compreso fra α e β (α e β incl.), l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ avrà sempre un valore determinato e finito, e sarà perciò una funzione di x sempre finita che potremo indicare con $F(x)$; e se x e $x+h$ sono due punti qualunque fra α e β (α e β incl.) si avrà (§. 223):

$$F(x+h)=\int_\alpha^x f(x)dx+\int_x^{x+h} f(x)dx ,$$

ovvero:

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(x)dx\,; \tag{31}$$

talchè, osservando che, per h sufficientemente piccolo in valore assoluto, il secondo membro è il contributo dell'intorno $(x, x+h)$ di x, a destra o a sinistra secondochè h è positivo o negativo (§. 222), e quindi ha per limite zero, si conclude subito che anche *quando la funzione $f(x)$ diviene infinita fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, restando però sempre atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ è ancora una funzione finita e continua di x per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclus.)*

232. Oltre a ciò poi, siccome si ha la formola (31) come nel §. 191, s'intende subito che pei punti x che non sono punti d'infinito di $f(x)$, rispetto alle derivate a destra o a sinistra si verificheranno quelle particolarità stesse che indicammo al §. 191 pel caso che la funzione fosse sempre finita fra α e β; e lo stesso accadrà anche per le derivate a destra o per le derivate a sinistra nei punti x d'infinito di $f(x)$, quando questi punti non figurino come tali negli intorni di x a destra o a sinistra respettivamente.

Se poi x è un punto d'infinito di $f(x)$ che figura come tale rispetto a tutti e due i suoi intorni a destra o a sinistra, o anche soltanto rispetto a uno $(x, x+h)$ di questi intorni, p.es. quello a destra, allora, ammesso che i valori di $f(x)$ nel punto x a destra siano continui, o abbiano soltanto una discontinuità ordinaria (§. 148. 2.°), per modo cioè che si abbia $\lim_{h=+0} f(x+h)=+\infty$ o $=-\infty$, p. es. $=+\infty$, sarà facile vedere che la derivata d_x della funzione $F(x)$ presa nel punto x a destra sarà appunto $+\infty$.

In questo caso infatti, quando h è positivo e sufficientemente piccolo, i valori di $f(x)$ nei punti x' compresi fra x e $x+h$ (x escl.) finiranno per essere sempre positivi e maggiori di quel numero che più ci piace A, e quindi per h' abbastanza piccolo, positivo o negativo, si avrà sempre dalla (31):

$$\frac{F(x'+h')-F(x')}{h'}>A,$$

talchè evidentemente gli estremi oscillatorii destri e sinistri di $F(x)$ nei punti x' dell'intervallo $(x, x+h)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x' a x avranno tutti per limite $+\infty$, e perciò sarà (§. 149. 4.°):

$$\lim_{h=+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=d_x=+\infty=f(x+0),$$

come appunto avevamo enunciato.

Risultati analoghi si hanno nel caso che le indicate particolarità si verifichino per gli intorni di x a sinistra; quindi si estendono così al caso attuale i risultati del §. 192, e si può ora evidentemente affermare che quand'anche $f(x)$ divenga infinita in punti fra α e β costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, restando però atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ ammetterà la derivata ordinaria (finita però o infinita e determinata di segno) nei punti nei quali $f(x)$ è continua e in quelli nei quali ha soltanto discontinuità di quelle che possono togliersi cambiando il valore della funzione nel punto corrispondente, e questa derivata sarà uguale respettivamente a $f(x)$ o al valore comune delle quantità $f(x+0)$ e $f(x-0)$; e nei punti invece nei quali la funzione $f(x)$ ha altre discontinuità, essendo sempre finita o infinita, le derivate a destra e a sinistra dell'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ esisteranno e avranno per valori $f(x+0)$ o $f(x-0)$ respettivamente tutte le volte che queste quantità abbiano un valore determinato finito o infinito; mentre se una o tutte e due queste quantità non avranno significato o in altri termini se da una o da tutte e due le parti di x la funzione $f(x)$ avrà una discontinuità di seconda specie, la derivata dell'integrale presa nel punto x dalla parte corrispondente *potrà* non esistere affatto.

E osservando che quand'anche $f(x)$ divenga infinita fra α e β

in un gruppo infinito di punti di prima specie, in qualunque porzione dell' intervallo (α, β) esisteranno sempre altri intervalli di ampiezza finita nei quali essa è sempre finita (§. 14), per quanto ora si è detto, o anche per ciò che dicemmo al §. 192, si può asserire che l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ sarà sempre una funzione finita e continua che in infiniti punti di qualsiasi porzione dell' intervallo (α, β) avrà la sua derivata ordinaria determinata e finita; e per il teorema del §. 14, in ogni porzione del medesimo intervallo esisteranno sempre altri intervalli nei quali l'integrale stesso è una funzione di prima specie (§. 134), vale a dire è una funzione che non ha infiniti massimi e minimi, o almeno li viene a perdere tutti togliendovi o aggiungendovi una funzione conveniente di primo grado.

233. Anche nel caso attuale, se la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e β, e α_1 è un numero qualunque compreso in questo intervallo, per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.) il valore dell'integrale $\int_{\alpha_1}^x f(x)dx$ il cui limite inferiore è in α_1 si otterrà sempre dalla stessa funzione $F(x)$ che rappresenta l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$, aggiungendovi una costante conveniente che non sarà altro che $-F(\alpha_1)$.

Inversamente poi *se $f(x)$ è una funzione che fra α e β diviene infinita soltanto in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, e negli intervalli nei quali è finita è atta alla integrazione; e al tempo stesso $\varphi(x)$ è un' altra funzione che è sempre finita e continua nell'intervallo (α, β) e che, all'infuori di una costante $-\varphi(\alpha_1)$ dipendente soltanto dal numero α_1, dà il valore degli integrali definiti $\int_a^x f(x)dx$ per tutti quei valori di x e di a pei quali l'intervallo (a, x) non viene a comprendere punti d'infinito di $f(x)$*, allora *la funzione data $f(x)$ sarà atta alla integrazione in tutto l'intervallo (α, β) e la formola:*

$$(32)\qquad \int_c^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(c)\,;$$

sussisterà per tutti i valori di c e di x fra α e β (α e β incl.).

Incominciamo infatti a supporre che la funzione $f(x)$ divenga infinita soltanto in un numero finito di punti fra α e β, e siano questi punti α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_m$.

Allora, supponendo p. es. $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < \beta$, e indicando con ε_1, ε'_1, ε_2, $\varepsilon'_2, \ldots$ numeri positivi e arbitrariamente piccoli, per x compreso fra α_t e α_{t+1}, per modo che sia $\alpha_t < x < \alpha_{t+1}$, si avranno le eguaglianze:

$$\varphi(\alpha_1 - \varepsilon_1) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha_1 - \varepsilon_1} f(x)\,dx\,,$$

$$\varphi(\alpha_2 - \varepsilon_2) - \varphi(\alpha_1 + \varepsilon'_1) = \int_{\alpha_1 + \varepsilon'_1}^{\alpha_2 - \varepsilon_2} f(x)\,dx\,,$$

. . . .

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha_t + \varepsilon'_t) = \int_{\alpha_t + \varepsilon'_t}^{x} f(x)\,dx\,,$$

e facendo tendere a zero tutte le quantità ε e ε', i primi membri di queste eguaglianze avranno tutte limiti determinati e finiti perchè $\varphi(x)$ è continua anche nei punti α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$; talchè sommandole si troverà che $f(x)$ è atta alla integrazione anche nell'intervallo (α, x), e si ha la formola:

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\,dx\,.$$

Se poi x è uno dei punti α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$, p. es. α_{t+1}, allora l'ultima delle eguaglianze precedenti si trasforma nella seguente:

$$\varphi(x - \varepsilon_{t+1}) - \varphi(\alpha_t + \varepsilon'_t) = \int_{\alpha_t + \varepsilon'_t}^{x - \varepsilon_{t+1}} f(x)\,dx\,,$$

che unita alle altre conduce ancora alle stesse conclusioni; quindi, poichè agli stessi risultati si giunge pure quando si suppone che x

sia compreso fra α e α_1 o fra α_m e β, e anche se uno o tutti e due gli estremi α e β sono punti d'infinito di $f(x)$, si può intanto asserire che $f(x)$ sarà atta alla integrazione in tutto l'intervallo (α, β), e si avrà la formola:

$$\varphi(x)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^x f(x)dx\ ,$$

per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclus.)

Facendo poi in questa formola $x=c$, si ottiene l'altra:

$$\varphi(c)-\varphi(\alpha)=\int_\alpha^c f(x)dx\ ,$$

che sottratta dalla precedente conduce appunto alla formola (32); quindi la proprietà enunciata sopra resta così dimostrata pel caso che $f(x)$ fra α e β divenga infinita soltanto in un numero finito di punti; talchè per dimostrare che essa sussiste in generale basterà ora al solito far vedere che, ammettendola giusta nel caso che $f(x)$ divenga infinita fra α e β in punti costituenti gruppi di ordine uguale o inferiore a $\nu-1$, essa sarà giusta anche nel caso che $f(x)$ divenga infinita nei punti di un gruppo di ordine ν.

Ora, ammettendo appunto che la proprietà enunciata sopra sia stata riconosciuta giusta pel caso dei gruppi di ordine uguale o inferiore a $\nu-1$, e supponendo che $f(x)$ divenga infinita in un gruppo di punti di ordine ν pel quale $\alpha_1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_m$ sono i punti del gruppo derivato ν°, si intende subito che si avranno ancora le formole scritte sopra e tutti i risultati precedenti, giacchè anche al successivo impiccolirsi delle $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \ldots$, negli intervalli $(\alpha, \alpha_1-\varepsilon_1)$, $(\alpha_1+\varepsilon_1, \alpha_2-\varepsilon_2), \ldots$ verranno sempre a cadere soltanto punti di gruppi dell'ordine $\nu-1$ al più; quindi la proprietà enunciata sopra può dirsi ora completamente dimostrata.

234. Il teorema dimostrato ha una particolare importanza, inquantochè evidentemente se $f(x)$ è una funzione che fra α e β diviene infinita in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, e in tutti gli intervalli nei quali è finita è atta alla integrazione, il teorema stesso ci dà un mezzo per riconoscere se la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione nell'intiero intervallo

(α, β); giacchè per questo basterà assicurarsi della esistenza di una funzione $\varphi(x)$ finita e continua *in tutto l'intervallo* (α, β) e dotata della proprietà che per tutti gli intervalli (a, x) nei quali $f(x)$ è finita si abbia sempre $\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x f(x)dx$. Oltre a ciò poi quando questa funzione $\varphi(x)$ esista, la conoscenza di essa ci darà modo di calcolare l'integrale anche fra due limiti qualunque c ed x dell'intervallo (α, β), poichè per qualunque intervallo (c, x) si avrà sempre:

$$\varphi(x)-\varphi(c)=\int_c^x f(x)dx\,.$$

Lo stesso teorema inoltre permette in certi casi di riconoscere se una funzione $\varphi(x)$ abbia delle discontinuità fra α e β o divenga infinita; poichè, se p. es. si saprà che la funzione data $f(x)$ è atta alla integrazione in tutti gli intervalli nei quali è finita senza esserlo nell' intiero intervallo (α, β), e al tempo stesso in tutti questi intervalli $(a\,, x)$ nei quali $f(x)$ è finita la funzione $\varphi(x)$ ci darà l'integrale $\int_a^x f(x)dx$ all'infuori della costante $-\varphi(a)$, allora si potrà immediatamente concludere che questa funzione $\varphi(x)$ è infinita o discontinua in tutti o in alcuni dei punti fra α e β nei quali $f(x)$ diviene infinita.

235. Giova però notare esplicitamente, per quanto possa apparire superfluo, che l'inversa dell'ultima proprietà dimostrata può in certi casi non aver luogo; e dal fatto che si sia trovata una funzione $\varphi(x)$ che è discontinua nei punti d'infinito di $f(x)$ e che negli intervalli (a, x) nei quali $f(x)$ è finita è invece continua e ci dà sempre:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x f(x)dx\,,$$

non si può concludere che $f(x)$ non sia atta alla integrazione fra α e β; potendo avvenire che la funzione discontinua $\varphi(x)$ provenga dalla funzione finita e continua che rappresenta l'integrale

$\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ per avervi aggiunto in alcuni degli intervalli nei quali $f(x)$ è finita una certa costante, e in altri altre costanti.

Però "se $\varphi(x)$ avrà soltanto un numero finito di discontinuità " che saranno tutte di seconda specie, e saranno in punti α_1, " $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ fra α e β nei quali $f(x)$ è infinita, e in tutti gli inter- " tervalli (a, b) nei quali essa è continua ci darà il valore del- " l'integrale corrispondente $\int_a^b f(x)dx$, allora si potrà asserire che " $f(x)$ non è atta alla integrazione negli intorni dei punti α_1, " $\alpha_2, \ldots \alpha_m$, e quindi non è atta alla integrazione nell'intiero " intervallo (α, β);" giacchè, a destra p. es. del punto α_1, si avrà:

$$\varphi(\alpha_1+\varepsilon)-\varphi(\alpha_1+\delta)=\int_{\alpha_1+\delta}^{\alpha_1+\varepsilon} f(x)dx\,, \tag{33}$$

e se $\varphi(x)$ a destra di α_1 avrà una discontinuità di seconda specie, l'integrale definito singolare $\int_{\alpha+\delta}^{\alpha_1+\varepsilon} f(x)dx$ non avrà per limite zero.

E può aggiungersi anche che " quando $f(x)$ è atta alla inte- " grazione in tutti gli intervalli fra α e β nei quali è finita, una " discontinuità di seconda specie a destra di un punto α_1 in una " funzione $\varphi(x)$ che serve pel calcolo degli integrali definiti estesi " a ogni intervallo a destra di α_1 che non comprende il punto α_1, " non potrà aversi altro che nel caso che α_1 sia un punto d'infi- " nito di $f(x)$"; giacchè altrimenti la formola (33) ci darebbe $\varphi(\alpha_1+\varepsilon)-\varphi(\alpha_1+\delta)=\theta(\varepsilon-\delta)$, essendo θ una quantità numericamente inferiore a un numero finito, e quindi $\varphi(x)$ non avrebbe la supposta discontinuità di seconda specie nel punto α_1 a destra.

Questa osservazione completa il teorema ultimo del §. 74.

236. Oltre a ciò poi il teorema del §. 233 conduce subito alla generalizzazione dei risultati ottenuti nei §§. 194 e 196.

Supponiamo infatti che $f(x)$ sia una funzione di x che nell'intervallo (α, β) è sempre finita o diviene infinita soltanto in un gruppo di punti G di prima specie, e esclusi tutt'al più anche

i punti di un secondo gruppo G_1 pure di prima specie, da una stessa parte degli altri punti p. es. a destra è sempre continua o ha soltanto discontinuità ordinarie; e supponiamo inoltre che $\varphi(x)$ sia una funzione di x finita e continua fra α e β e tale che esclusi tutt'al più i punti dei gruppi G e G_1 e quelli di un altro gruppo G_2 pure di prima specie nei quali è incerto, in tutti gli altri abbia la sua derivata a destra d_x uguale a $f(x)$ o a $f(x+0)$ secondochè in questi punti a destra $f(x)$ è continua o discontinua.

Allora la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione in tutti gli intervalli nei quali è finita (§. 187. 4.°), e in questi intervalli (a, x) si avrà anche (§. 194):

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x f(x)dx\,;$$

quindi pel teorema del §. 233, la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione anche nell'intiero intervallo (α, β), e per tutti i punti c e x compresi in questo intervallo (α e β incl.) si avrà:

$$\varphi(x)-\varphi(c)=\int_c^x f(x)dx\,;$$

talchè anche in questo caso si può evidentemente asserire che per le funzioni $f(x)$ che fra α e β sono sempre finite o divengono infinite soltanto in un gruppo di punti di prima specie, e che fuori di questi punti sono continue totalmente o soltanto generalmente, o sono funzioni punteggiate discontinue che, se hanno discontinuità di seconda specie, fatta tutt'al più eccezione pei punti di un gruppo G di prima specie, le hanno soltanto da una stessa parte (destra o sinistra) dei punti corrispondenti, il calcolo degli integrali definiti fra α e β potrà farsi coi metodi stessi che si danno negli ordinarii trattati di calcolo integrale per le funzioni sempre finite, estesi soltanto questi metodi come si disse al §. 194 in modo da renderli applicabili a tutte le funzioni ora indicate, e supposto che la funzione $\varphi(x)$ che secondo i metodi stessi deve servire al calcolo degli integrali sia sempre finita e continua fra α e β.

È poi da notare che per ogni funzione $f(x)$ che negli inter-

valli nei quali è finita soddisfa alle condizioni indicate sopra, la condizione di essere atta alla integrazione anche negli intorni dei suoi punti d'infinito fra α e β trovasi sempre soddisfatta quando la funzione $\varphi(x)$ cui conducono i metodi ordinarii del calcolo integrale sia finita e continua fra α e β; e evidentemente in alcuni casi questa osservazione potrà anche servire a assicurarci che una data funzione $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e β.

Così p. es. quando sia data da integrare la funzione $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}}-\frac{3}{2}\mathrm{sen}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x}$ che diviene infinita nei punti $0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots$ che costituiscono un gruppo di prima specie e pei quali il punto 0 è un punto-limite, si concluderà subito che essa è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, anche che questo intervallo comprenda il punto zero, giacchè i metodi ordinarii del calcolo integrale mostrano che negli intervalli (a, x) nei quali la indicata funzione è finita il suo integrale differisce soltanto per una quantità costante dalla funzione finita e continua che per x diverso da zero è uguale a $-\frac{3}{2}x\,\mathrm{sen}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x}$ e per $x=0$ è zero. Conseguentemente anche la funzione $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}}$, come l'altra $\frac{\cos\frac{1}{x-a}}{(x-a)\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-a}}+\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}}$ ove a è una costante qualunque, sono atte alla integrazione in qualunque intervallo finito, ec...

Al solito però il trovare delle discontinuità in una funzione $\varphi(x)$ che secondo i metodi ordinarii del calcolo integrale valesse a darci gl'integrali definiti per una funzione $f(x)$ (come quella considerata sopra) in tutti gli intervalli nei quali questa funzione $f(x)$ è finita, non può inversamente portare alla conclusione che $f(x)$ non sia atta alla integrazione nell'intiero intervallo (α, β), a meno che le discontinuità di $\varphi(x)$ non siano tutte di seconda

specie almeno da una parte dei punti corrispondenti, e siano in numero finito (paragr. preced,).

237. Supponiamo ora che $F(x)$ sia una funzione finita e continua nell'intervallo (α, β), e la sua derivata d_x presa p. es. a destra di ogni punto x fra α e β (β escl.) sia sempre determinata e finita o divenga infinita soltanto in un gruppo di punti G di prima specie (*), e negli altri punti sia sempre continua o abbia tutt'al più delle discontinuità ordinarie (le quali allora §. 149 verranno ad essere soltanto a sinistra dei punti corrispondenti); o anche se questa derivata d_x ha delle indeterminazioni le abbia soltanto in un gruppo di punti G_1 pure di prima specie, come se ha delle discontinuità di seconda specie, fatta allora tutt'al più eccezione per un gruppo di punti pure di prima specie G_2, le abbia soltanto da una stessa parte dei punti corrispondenti.

Allora, attribuendo a d_x valori qualunque anche nei punti d'indeterminazione, si formerà una funzione che per quanto si è detto nel paragrafo precedente sarà atta alla integrazione nell'intiero intervallo (α, β), e si avrà:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x d_x dx,$$

per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.); talchè anche in questi casi colla integrazione della derivata d_x di $F(x)$ presa a destra dei punti x che cadono fra α e β (β escl.) si riproduce la funzione primitiva $F(x)$ all'infuori di una costante, e l'integrazione si presenta allora come una operazione inversa della derivazione.

In particolare dunque ricordando il teorema del §. 162, si può ora asserire che: *se $F(x)$ è una funzione finita e continua che fra α e β non ha infiniti massimi e minimi e neppure li acquista*

(*) S'intende che fra i punti d'infinito di d_x noi dobbiamo ora includere anche quelli nei quali avviene soltanto che in alcuni punti di ogni loro intorno comunque piccolo a destra o a sinistra d_x prende valori numericamente maggiori di qualunque quantità data, pure essendo finita o non esistendo nel punto x stesso; come avviene per es. pel punto $x=0$ quando la funzione $F(x)$ è quella che per x diverso da zero è positivo è uguale a $x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e per $x=0$ è zero.

togliendovi (o aggiungendovi) le funzioni di primo grado $\mu x+\nu$; *o anche se fra le infinite funzioni* $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ *che così si ottengono (la* $F(x)$ *incl.) per ogni punto* x *fra* α *e* β *ne esiste tutt'al più una che in ogni intorno di* x_0 *a destra abbia un numero infinito di massimi e minimi, e lo stesso accade per gli intorni di* x_0 *a sinistra,* allora *se l'intervallo* (α, β) *è uno di quelli nei quali le derivate di* $F(x)$ *prese a destra e a sinistra sono sempre finite o divengono infinite soltanto in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, queste derivate* d_x *e* d'_x *saranno atte alla integrazione fra* α *e* β, *e integrate fra* α *e* x *riprodurranno sempre la funzione primitiva* $F(x)$ *all'infuori di una costante* $F(\alpha)$, *per modo cioè che si avrà:*

$$F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x d_x dx=\int_\alpha^x d_x dx\,.$$

238. Questi risultati sono evidentemente la completa estensione di quelli dei §§. 194, 195 e 196 ottenuta così appoggiandosi su questi risultati stessi e sul teorema del §. 218. Come si disse poi al §§. 197, relativamente allora ai risultati degli indicati paragrafi, si può ora affermare che anche i risultati attuali possono cessare di essere esatti quando le condizioni che per essi abbiamo poste non siano tutte soddisfatte.

Similmente i teoremi dei §§. 197, 198, 199, relativi agli integrali degli estremi oscillatorii, delle derivate a destra o a sinistra, o delle oscillazioni derivatorie di una funzione finita e continua, si estendono al caso in cui, senza richiedere che queste quantità si mantengano sempre finite, si ammette che possano anche divenire infinite in un gruppo di punti di prima specie.— Queste estensioni si fanno con tutta facilità appoggiandosi sui teoremi stessi da estendersi e su quello del §. 233, e si trova così che:

Se pei valori di x *fra* α *e* β *(*α *e* β *incl.) una funzione finita e continua* $F(x)$ *rappresenta all'infuori di una costante l'integrale di un altra funzione* $f(x)$ *che, pure divenendo infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie fra* α *e* β, *resta atta alla integrazione in questo intervallo,* allora *gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali della funzione integrale* $F(x)$

saranno atti essi pure alla integrazione, e non potranno differire dalla funzione $f(x)$ altro che per una funzione d'integrale nullo.

2.° *se per una funzione* $F(x)$ *che è finita e continua in tutto un intervallo* (α, β) *uno degli estremi oscillatorii dei suoi rapporti incrementali diviene infinito in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, ma in tutti gli intervalli nei quali è finito è atto alla integrazione,* allora *sì esso che gli altri estremi oscillatorii risulteranno atti all'integrazione nell'intiero intervallo* (α, β), *e integrati riprodurranno la funzione data* $F(x)$ *all'infuori di una costante.*

239. Quando una funzione $f(x)$ diviene infinita fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, e negli intervalli nei quali è finita è atta alla integrazione, per riconoscere se essa sia tale anche nell'intiero intervallo (α, β), basterà ricorrere alla definizione o ai criteri che risultano dalle considerazioni precedenti. In molti casi però quando il numero dei punti nei quali $f(x)$ diviene infinita fra α e β è finito, per decidere la questione sarà assai più comodo fare uso del teorema seguente, che spesso è di una applicazione assai facile: *se fra* α *e* β *la funzione* $f(x)$ *diviene infinita soltanto per* $x=\beta$, *e fra* α *e* $\beta-\varepsilon$, *essendo* $\alpha<\beta$, *per quanto piccolo si prenda il numero positivo* ε, *è sempre finita e atta alla integrazione, l'integrale* $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ *sarà determinato e finito tutte le volte che* $f(x)$ *per* $x=\beta$ *(a sinistra) diviene infinita di ordine inferiore o uguale o anche soltanto non maggiore* (§. 27) *di quello di una qualunque delle funzioni:*

$$\frac{1}{(\beta-x)^{1-\mu}},\quad \frac{1}{(\beta-x)\{\log(\beta-x)\}^{1+\mu}},\quad \frac{1}{(\beta-x)\log(\beta-x)\{\log^2(\beta-x)\}^{1+\mu}},\ldots$$

ove μ *è una quantità determinata differente da zero e positiva (che nella prima funzione può supporsi inferiore a uno perchè altrimenti* $f(x)$ *sarebbe finita anche per* $x=\beta$); *e lo stesso integrale sarà invece infinito tutte le volte che, coll'avvicinarsi indefinitamente di* x *a* β *dalla parte sinistra, la funzione finisce per conservare sempre lo stesso segno, e per* $x=\beta$ *diviene infinita di ordine*

superiore o uguale o soltanto non minore di quello di una delle funzioni:

$$(34) \qquad \frac{1}{\beta-x},\ \frac{1}{(\beta-x)\log(\beta-x)},\ \frac{1}{(\beta-x)\log(\beta-x)\log^2(\beta-x)},\ldots;$$

intendendo, per semplicità, che nel calcolo successivo dei logaritmi che quì compariscono, quando sono negativi, si prendano sempre i loro valori assoluti, per modo p. es. che quando $\log(\beta-x)$ è negativo, la quantità $\log^2(\beta-x)$ rappresenti $\log\{-\log(\beta-x)\}$ o $\log^2\frac{1}{\beta-x},\ldots$

Incominciamo dal dimostrare la prima parte del teorema enunciato, e per questo osserviamo che, per le ipotesi relative a questo caso, si potrà trovare (§. 27) un numero positivo ε talmente piccolo che una almeno delle quantità:

$$f(x)(\beta-x)^{1-\mu},\quad f(x)(\beta-x)\{\log(\beta-x)\}^{1+\mu},$$
$$f(x)(\beta-x)\log(\beta-x)\{\log^2(\beta-x)\}^{1+\mu},\ldots$$

pei valori di x fra $\beta-\varepsilon$ e β (β escl.) resti sempre numericamente inferiore a una quantità finita e positiva c.

Si dedurrà subito da ciò che l' integrale definito singolare $\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)dx$ $(0<\delta<\varepsilon)$ sarà numericamente inferiore a una delle quantità:

$$c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta}\frac{dx}{(\beta-x)^{1-\mu}},\quad c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta}\frac{dx}{(\beta-x)\{\log(\beta-x)\}^{1+\mu}},$$
$$c\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta}\frac{dx}{(\beta-x)\log(\beta-x)\{\log^2(\beta-x)\}^{1+\mu}},\ldots$$

le quali sono respettivamente uguali alle altre:

$$\frac{c}{\mu}(\varepsilon^\mu-\delta^\mu),\quad \frac{c}{\mu}\{(\log\varepsilon)^{-\mu}-(\log\delta)^{-\mu}\},\quad \frac{c}{\mu}\{(\log^2\varepsilon)^{-\mu}-(\log^2\delta)^{-\mu}\},\ldots$$

quindi evidentemente si avrà $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta-\delta} f(x)dx = 0$ per ogni valore di δ inferiore a ε; e questo dimostra appunto la prima parte del teorema.

Per dimostrare ora anche la seconda parte, si osservi che se ε è un numero già sufficientemente piccolo, fra α e $\beta-\varepsilon$ esisterà un numero γ dotato della proprietà che per tutti i valori di x fra γ e β (β al più escl.) la funzione $f(x)$ conservi sempre lo stesso segno, e oltre a ciò sia tale che una almeno delle quantità:

$$f(x)(\beta-x)\,,\quad f(x)(\beta-x)\log(\beta-x)\,,\quad f(x)(\beta-x)\log^2(\beta-x)\,,\ldots$$

in valore assoluto sia sempre superiore a un numero diverso da zero e positivo c.

Osservando poi che si ha:

$$\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^{\beta-\varepsilon} f(x)dx\,,$$

si vede che per avere il limite dell'integrale $\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx$ basterà trovare quello dell'integrale $\int_\gamma^{\beta-\varepsilon} f(x)dx$; quindi, poichè per quanto ora abbiamo detto, quest'ultimo integrale sarà numericamente maggiore di una delle quantità:

$$c\int_\gamma^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{\beta-x}\,,\quad c\int_\gamma^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{(\beta-x)\log(\beta-x)}\,,\quad c\int_\gamma^{\beta-\varepsilon}\frac{dx}{(\beta-x)\log(\beta-x)\log^2(\beta-x)}\,,$$

e queste sono respettivamente uguali alle altre:

$$c\{\log\varepsilon-\log\beta-\gamma)\}\,,\ c\{\log^2\varepsilon-\log^2(\beta-\gamma)\}\,,\ c\{\log^3\varepsilon-\log^3(\beta-\gamma)\}\,,\ldots$$

che crescono indefinitamente al successivo impiccolirsi di ε, si conclude subito che si avrà: $\lim\int_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(x)dx = \pm\infty$, e con ciò resta dimostrata anche la seconda parte del teorema enunciato.

240. Farò notare che la prima parte di questo teorema sussiste anche quando $f(x)$ diviene infinita fra α e β in un numero finito di punti, purchè per ciascun punto siano verificate le condizioni poste nell'enunciato, perchè allora l'integrale dato può evidentemente spezzarsi in un numero finito d'integrali per ciascuno dei quali la funzione divenga infinita soltanto a uno dei limiti. La seconda parte poi sussiste essa pure quando $f(x)$ fra α e β diviene infinita in un numero finito di punti, purchè per alcuni di questi punti, oltre a essere soddisfatte le condizioni del teorema, il segno della funzione sia lo stesso in intorni abbastanza piccoli degli stessi punti, e negli intorni degli altri punti d'infinito pei quali queste condizioni non sono soddisfatte la funzione sia atta alla integrazione.

Oltre a ciò si può osservare che dalla dimostrazione stessa che abbiamo fatta apparisce che la seconda parte del teorema enunciato sopra continua a sussistere quando $f(x)$ nel punto β soddisfa ancora alle condizioni poste in fine dell'enunciato stesso, ma diviene infinita in infiniti punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ posti negl'intorni di β a sinistra per modo che β sia un loro punto-limite; e ciò tanto nel caso che negli intorni di ciascuno di questi punti la funzione si mantenga atta alla integrazione quanto anche evidentemente nel caso in cui questo non accada.

241. Infine farò notare che, come risulta dalla dimostrazione stessa della seconda parte del teorema precedente, se la funzione $f(x)$ cangierà continuamente di segno col tendere di x a β (a sinistra), quand'anche essa divenga ancora infinita di ordine uguale, superiore o anche soltanto non minore di quello di una delle funzioni (34), l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ potrà non essere più infinito; e lo stesso potrà pure accadere quando la funzione $f(x)$ col tendere di x a β prende anche valori numericamente maggiori di qualsiasi numero dato ma è in uno di quei casi considerati in fine del §. 29 in cui il suo ordine d'infinito non può paragonarsi con quello di nessuna delle funzioni (34), per quanto limitandosi a considerarla soltanto per un gruppo conveniente di valori (discreti) di x dei quali β sia un punto-limite, essa possa allora

riguardarsi come una quantità che col tendere di questi valori x a β diviene infinita di ordine superiore o uguale a quello di alcune o di tutte le quantità (34). Questa circostanza infatti si presenta p. es. pei due integrali $\int_0^b \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2}dx$, $\int_0^b \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - 2\frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$, dei quali il primo non può considerarsi come infinito ma soltanto come indeterminato, poichè esso risulterebbe dal limite della quantità $\cos\frac{1}{b} - \cos\frac{1}{\varepsilon}$ per $\varepsilon = 0$; e il secondo ha evidentemente un valore determinato e finito che è $2\sqrt{b}\operatorname{sen}\frac{1}{b}$.

242. Finora abbiamo considerato le funzioni $f(x)$ soltanto in intervalli (α, β) di ampiezza finita. Ora supporremo che una funzione $f(x)$ sia data in intervalli di ampiezza infinita (cioè anche per valori di x maggiori di qualunque numero dato), e considereremo anche gli integrali di queste funzioni in questi intervalli.

Incominceremo perciò col dire che quando $f(x)$ è una funzione atta alla integrazione in ogni porzione finita ma grande quanto si vuole dell'intervallo in cui si considera (ammesso anche che $f(x)$ in queste porzioni possa divenire infinita in punti costituenti un gruppo sempre finito o infinito di prima specie), per valore dell'integrale definito $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ o dell'altro $\int_{-\infty}^\alpha f(x)dx$, ove α è finito, s'intende il limite dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, o dell'altro $\int_{-\beta}^\alpha f(x)dx$, per β crescente indefinitamente per valori positivi; e per valore dell'integrale definito $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ s'intende il limite dell'integrale $\int_{-\alpha}^\beta f(x)dx$ per α e β crescenti indefinitamente per valori positivi e indipendentemente l'uno dall'altro; e facendo le solite distinzioni pei casi in cui questi limiti sono determinati e finiti, o sono infiniti, o sono indeterminati, si dice che una funzione $f(x)$ *è atta alla integrazione definita* fra α e ∞, o fra α e $-\infty$ o fra

$-\infty$ e ∞ soltanto nel caso in cui l'integrale corrispondente $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, $\int_\alpha^{-\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito.

243. Aggiungiamo che, seguendo il Cauchy, si chiama *valore principale* dell'integrale $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ il limite dell'integrale $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx$ per α crescente indefinitamente per valori positivi; e osserviamo che, con questa denominazione, si può dire che quand'anche l'integrale $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ non sia determinato (finito o infinito), il suo valore principale però potrà esserlo; e quando l'integrale $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ sia determinato, il suo valore coinciderà sempre col valore principale.

Ricordando poi che Cauchy chiamava integrali definiti singolari per gli integrali $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, l'uno o l'altro o tutti e due gli integrali $\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx$, $\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)dx$, ove μ e ν sono numeri positivi qualunque, e ε è pure positivo e arbitrariamente piccolo, osserveremo che conviene ora modificare il concetto di Cauchy; e chiameremo invece *integrali definiti singolari* gli integrali $\int_{-\beta-\gamma}^{-\beta} f(x)dx$, $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)dx$, ove β è positivo e arbitrariamente grande, e γ è un altro numero positivo qualunque; talchè con questa definizione, in forza del teorema del §. 23, si potrà evidentemente asserire che *affinchè una funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione definita in un intervallo di ampiezza infinita* (α, ∞), *o* ($-\infty$, α), *o* ($-\infty$, ∞) *è necessario e sufficiente che essa sia atta alla integrazione in qualunque porzione finita ma grande quanto si vuole dello stesso intervallo, e che gli integrali definiti*

singolari corrispondenti $\int_{-\beta-\gamma}^{-\beta} f(x)dx$, $\int_{\beta}^{\beta+\gamma} f(x)dx$ *abbiano per limite zero per* $\beta=+\infty$, *qualunque sia* γ *purchè positivo.*

Inoltre, per l'analogia che si ha colle serie, chiameremo *resto dell' integrale* $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ il valore dell'integrale $\int_{\beta}^{\infty} f(x)dx$ per β positivo e grande quanto si vuole; e similmente chiameremo *resto dell'integrale* $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ il valore dell'integrale $\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx$ per β ancora positivo e grande quanto si vuole; e nel caso dell'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ considereremo separatamente i due resti $\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx$, $\int_{\beta}^{\infty} f(x)dx$; talchè evidentemente, introducendo ora nelle nostre considerazioni i resti degli integrali, si potrà anche affermare che *onde una funzione* $f(x)$ *sia atta alla integrazione in un intervallo di ampiezza infinita, è necessario e sufficiente che essa sia tale in qualunque porzione finita ma grande quanto si vuole dell'intervallo stesso, e che i resti corrispondenti* $\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx$, $\int_{\beta}^{\infty} f(x)dx$ *abbiano per limite zero col crescere indefinito di* β *(per valori positivi).*

244. I risultati 1.° 2.° 4.° 9.° 10.° 11.° 12.° 13.° 14.° e 16.° del §. 190, che già al §. 223 dicemmo estendersi al caso delle funzioni che pur restando atte alla integrazione in un intervallo finito (α, β) divengono infinite fra α e β in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, si estendono evidentemente anche al caso in cui uno o tutti e due i limiti degli integrali sono infiniti, e le funzioni (finite o infinite) corrispondenti sono atte alla integrazione nell'intervallo infinito nel quale si considerano.

Alcuni poi degli altri risultati del §. 190 cessano quì pure di

sussistere o almeno soffrono delle eccezioni, e noi mostreremo ora in che cosa queste eccezioni consistano, limitandoci però sempre d'ora innanzi a considerare gli integrali $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ nei quali il limite superiore è $+\infty$ e l'inferiore è una quantità finita α; giacchè gli integrali $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nei quali i due limiti sono infiniti possono ridursi ai due $\int_{-\infty}^\alpha f(x)dx$, $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, nei quali uno solo dei limiti è infinito, e il primo di questi si riduce ancora alla stessa forma del secondo riguardando per variabile $-x$ invece di x.

245. Incominciando ora dall'occuparci del caso del prodotto di due o più funzioni, p. es. di due, dimostreremo il seguente teorema che estende al caso degli intervalli d'integrazione infiniti il risultato 6.° del §. 190 e quelli dei §§. 226 e 227.

Se $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono due funzioni di x in un intervallo di ampiezza infinita, p. es. da α a $+\infty$, e restano sempre finite o divengono infinite in punti che in ogni intervallo di ampiezza finita compreso fra α e ∞ costituiscono soltanto dei gruppi finiti o infiniti di prima specie; e se al tempo stesso una almeno di queste funzioni, p. es. la $f(x)$, è atta alla integrazione fra α e ∞, e il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è atto esso pure alla integrazione in qualunque porzione finita (α, β) *dell'intervallo* (α, ∞); allora *questo prodotto $f(x)\varphi(x)$ sarà atto alla integrazione anche fra α e ∞ quando sia soddisfatta l'una o l'altra delle condizioni seguenti:*

1.° che almeno a partire da un certo valore finito x' di x in poi la funzione $\varphi(x)$ si mantenga sempre numericamente inferiore a un numero finito, e la funzione $f(x)$ resti atta alla integrazione da x' a ∞ anche riducendola ai suoi valori assoluti $f_1(x)$.

2.° che almeno a partire da un certo valore finito x' di x fino all'infinito ambedue le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ restino sempre numericamente inferiori a un numero finito, e la funzione $\varphi(x)$ non faccia mai oscillazioni.

Nel primo caso infatti, indicando con σ un numero positivo

arbitrariamente piccolo, e con β un numero qualunque superiore a un certo numero maggiore di x', per ogni numero positivo γ si avrà $\int_\beta^{\beta+\gamma} f_1(x)dx < \sigma$; e quindi se L è il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ fra x' e ∞ pel teorema del §. 225 si avrà in valore assoluto $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)\varphi(x)dx \leq L \int_\beta^{\beta+\gamma} f_1(x)dx < L\sigma$; e questo (§. 243) dimostra intanto la prima parte del teorema.

Nel secondo caso poi, indicando ancora con σ un numero positivo arbitrariamente piccolo e con β un numero qualunque superiore a un certo numero maggiore di x', per ogni numero positivo γ si avrà: $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)dx < \sigma$, e pel teorema del §. 207 sarà $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)\varphi(x)dx < 2L\sigma$, essendo al solito L il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ fra x' e ∞, e questo dimostra anche la seconda parte del teorema enunciato.

S' intende subito ora come questo teorema possa estendersi anche al caso del prodotto di un numero maggiore di funzioni.

246. Estesi così anche agli intervalli di ampiezza infinita i teoremi intorno alla integrabilità dei prodotti di più funzioni si trova immediatamente una estensione analoga del teorema 6.° del §. 190 e di quello del §. 229 intorno al quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; poichè, considerando questo quoziente come il prodotto delle due funzioni $f(x)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$, pel teorema precedente si vede subito che: *se la funzione numeratore $f(x)$ è atta alla integrazione nell'intervallo (α, ∞), e il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è atto alla integrazione in qualunque porzione finita (α, β) dell'intervallo stesso (α, ∞), esso lo sarà anche da α a ∞ quando almeno a partire da un certo valore finito x' di x fino all'infinito la funzione denominatore $\varphi(x)$ si mantenga sempre discosta da zero più di una quantità determinata λ, e al tempo*

stesso sia soddisfatta la condizione che da x' a ∞ la funzione numeratore $f(x)$ resti atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti, o sia soddisfatta l'altra che da x' in poi anche la funzione numeratore $f(x)$ non superi mai in valore assoluto un numero finito, e la funzione denominatore non faccia mai oscillazioni.

247. Similmente i risultati 17.° 18.° e 19.° del §. 190, che già estendemmo nel §. 230 al caso delle funzioni che in un intervallo finito d'integrazione divengono infinite in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie, continuano a sussistere anche quando l'intervallo d'integrazione diviene di ampiezza infinita, purchè però nel caso del risultato 17.° si ponga ancora come dato che la funzione ivi indicata con $\varphi(x)$ resti atta alla integrazione nello stesso intervallo anche riducendola ai suoi valori assoluti; come già si fece del resto anche al §. 230.

248. Anche i risultati 7.° e 8.° del §. 190 possono, con certe restrizioni, venire estesi al caso in cui la funzione $f(x)$ si mantiene sempre finita, ma diviene infinito l'intervallo d'integrazione; però onde fare rigorosamente questa estensione ci occorre di cercare dapprima se e in quali casi la definizione che noi abbiamo data per gli integrali presi fra limiti finiti può venire estesa agli integrali presi fra limiti infiniti, per modo cioè che, immaginando diviso l'intervallo infinito (α, ∞) in un numero infinito d'intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ possa riguardarsi come il limite della somma della serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ formata dai prodotti di questi intervalli δ_s moltiplicati ciascuno per un numero f_s compreso fra i limiti inferiore e superiore dei valori della funzione nei respettivi intervalli δ_s (questi limiti inclusi), preso lo stesso limite all'impiccolire indefinitamente degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ secondo una legge tutt'affatto qualunque.

E ciò noi facciamo mossi dalla considerazione che propriamente la definizione che così si avrebbe per gli integrali definiti $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ non è la stessa di quella che noi abbiamo dato per gli

integrali medesimi, e quindi sarebbe effettivamente a cercarsi se queste definizioni potrebbero riguardarsi come concordanti fra loro.— Si aggiunge poi che se indichiamo con β un numero finito ma arbitrariamente grande, con $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $n-1$ valori di x fra α e β, e con $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ gli intervalli corrispondenti $x_1-\alpha, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, \beta-x_{n-1}$, si ha per definizione:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^n \delta_s f_s,$$

ove f_s è un numero compreso fra il limite inferiore e il limite superiore di $f(x)$ nell' intervallo δ_s (questi limiti inclus.), e quindi valendosi della vera definizione dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, si avrà:

$$\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim_{\beta=\infty} \left\{ \lim_{\delta_s=0} \sum_1^n \delta_s f_s \right\};$$

talchè, siccome nel secondo membro deve prendersi prima il limite rapporto alle quantità δ_s, e poi quello rapporto a β, apparisce di quì che effettivamente, almeno senza una conveniente dimostrazione, non si può affermare che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ sarà sempre il limite della somma della serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ quando le δ_s tendono a zero; giacchè in quest'ultimo caso si viene a prendere prima il limite rispetto a β (poichè si suppone subito infinito l'intervallo d'integrazione) e poi quello rispetto agli intervalli δ_s, e si viene così a fare una inversione di limiti.

249. Noi cercheremo dunque se e in quali casi la vera definizione dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, e quella che risulterebbe dall'estendere la definizione che si ha per gli integrali fra limiti finiti possono prendersi indifferentemente l'una per l'altra, per modo cioè che si abbia: $\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty \delta_s f_s$; e dimostreremo perciò dap-

prima che: *quando la funzione $f(x)$ è sempre finita fra α e ∞, se si troverà che, formando le $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ con una qualche legge* speciale *determinata, la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ ha un limite determinato e finito quando le δ_s convergono a zero,* allora *la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione fra α e ∞, e il limite della serie sarà appunto il valore dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$*; come dimostreremo altresì che *la condizione necessaria e sufficiente perchè per un dato sistema di valori* speciali *delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ la serie stessa $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ (supposta convergente) abbia un limite determinato e finito, è espressa ancora dalla solita condizione di integrabilità* $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$ *applicata nell'intervallo infinito* (α, ∞) *agli indicati intervalli* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$; per modo cioè che *si potrà assicurare che la formola:*

$$\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_1^\infty \delta_s f_s \ , \tag{35}$$

sussiste rigorosamente tutte le volte che si saprà che il suo secondo membro ha un valore determinato e finito, o si saprà che la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ almeno dopo che le δ_s saranno divenute sufficientemente piccole è convergente, e che al tempo stesso la solita quantità $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ ha per limite zero, intendendo sempre che i numeri f_s devono essere presi comunque fra i limiti inferiore e superiore l_s e L_s di $f(x)$ nell'intervallo corrispondente δ_s (questi limiti inclusi), e gli intervalli δ_s *basta* che siano formati con leggi *speciali* determinate, ma che possono essere qualunque.

Ammettiamo infatti dapprima che la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ abbia un limite determinato e finito A, qualunque siano i valori che si prendono per le f_s negli intervalli δ_s che successivamente si formano

con una certa legge determinata. Questa serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ almeno quando le δ_s siano divenute sufficientemente piccole sarà convergente, e si avrà:

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \lim \sum_1^\infty \delta_s l_s = \lim \sum_1^\infty \delta_s L_s = A,$$

e si troverà perciò intanto $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$; talchè, indicando con con n e n' due numeri variabili coll'impiccolire delle quantità δ_s, e determinati sempre in modo che δ_n sia il primo degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ il cui estremo superiore è maggiore di un certo numero α_1, e $\delta_{n'}$ sia l'ultimo degli stessi intervalli il cui estremo inferiore è minore di un altro numero β_1 $(\beta_1 > \alpha_1)$, si vede subito che quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ siano già ridotte sufficientemente piccole, siccome sì esse che le quantità $D_1, D_2, \ldots D_n, \ldots$ sono tutte positive, anche la somma $\sum_n^{n'} \delta_s D_s$ finirà per essere minore di quel numero che più ci piace σ; e questo permette intanto di dire che la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione definita in qualunque intervallo di ampiezza finita (α, β).

Segue da ciò (190. 8.°) che per ogni sistema di valori degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$, e qualunque sia n, si avrà la formola

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n} f(x)dx + k_n \sum_1^n \delta_s D_s,$$

essendo k_n un numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 inclus.) (*);

(*) Propriamente stando a quanto si dimostrò al §. 190. 8.° invece di k_n noi dovremmo scrivere $2\,k_n$. Però si può osservare che se al §. 190. 7.° invece di ragionare sulla formola:

$$\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s - \sum_1^n \delta_s f_s \leq 2 \sum_1^n \delta_s D_s + n d' D$$

avessimo ragionato al modo stesso sulla formola precedente:

$$\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s - \sum_1^n \delta_s f_s \leq \sum_1^n \delta_s D_s + \sum_1^{n'} \delta'_s D'_s$$

talchè quando le δ_s siano già talmente piccole che si abbia sempre $\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma$, si potrà scrivere evidentemente:

$$(36) \qquad \sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+..+\delta_n} f(x)dx + k'_n \sigma,$$

essendo k'_n compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 incl.)

D'altra parte, siccome la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è convergente, si può scrivere:

$$\sum_1^\infty \delta_s f_s = \sum_1^n \delta_s f_s + \sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s, \quad \text{ovvero:} \quad \sum_1^n \delta_s f_s = \sum_1^\infty \delta_s f_s - \sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s,$$

e per ogni sistema di valori speciali delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ esisterà un numero m dipendente da questi valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ ma sempre finito e tale che per *ogni* valore di n non inferiore ad m le somme $\sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s$ per gli stessi valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ siano sempre numericamente inferiori a σ; quindi, poichè si può anche supporre che le stesse $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ siano già state prese tanto piccole che la somma corrispondente $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ differisca da A

coll'osservare cioè che all'impiccolire delle δ'_s la somma $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s$ finisce per differire tanto poco quanto si vuole dall'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, e l'altra $\sum_1^{n'} \delta'_s D'_s$ finisce per esser piccola a piacere, avremmo trovato anche la formola più semplice:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_1^n \delta_s f_s \leq \sum_1^n \delta_s D_s,$$

e quindi avremmo veduto che l'errore per eccesso o per difetto che si commette prendendo $\sum_1^n \delta_s f_s$ come valore approssimato dell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ non supera mai neppure la somma corrispondente $\sum_1^n \delta_s D_s$, e avremmo potuto scrivere anche $k_1, k_2, \ldots k_i$ invece di $2k_1, 2k_2, \ldots 2k_i$ nelle formole del §. 190. 8.°. È perciò che d'ora innanzi noi faremo a meno di tener conto del fattore 2 nell'applicazione delle stesse formole.

meno di σ, si può ora evidentemente asserire che per ogni sistema speciale di valori sufficientemente piccoli delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ la differenza $A - \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2\ldots\delta_n} f(x)dx$ al crescere indefinito di n si manterrà sempre numericamente inferiore a 3σ.

Ma se β è un numero qualunque superiore a $\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_m$, si potrà sempre trovare un numero $n \geq m$ tale che l'estremo superiore $\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n$ dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n} f(x)dx$ differisca da β meno di δ_{n+1}, per modo che l'integrale stesso differisca dall'altro $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ meno della quantità εL, essendo L il limite superiore dei valori di $f(x)$ fra α e ∞, e ε un numero di cui le δ_s sono tutte più piccole; dunque poichè anche ε può supporsi piccolo a piacere, è evidente ora che dato un numero arbitrariamente piccolo σ_1, la differenza $A - \int_\alpha^\beta f(x)dx$, al crescere sempre più di β finirà per divenire e restare poi sempre numericamente inferiore a questo numero σ_1, e quindi la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione anche fra α e ∞ e si avrà $\lim_{\beta=\infty} \int_\alpha^\beta f(x)dx = A$, ovvero $\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim \sum_1^\infty \delta_s f_s$; e questo dimostra intanto una parte del teorema enunciato.

Per dimostrare anche l'altra parte del medesimo teorema, ammettiamo ora che si sappia che quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ sono formate secondo una certa legge speciale determinata, e almeno dopo che esse siano divenute sufficientemente piccole, la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è sempre convergente, e l'altra $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ al tendere a zero delle stesse $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ ha per limite zero.

Allora, considerando le due serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, $\sum_1^\infty \delta'_s f'_s$ corrispon-

denti a due qualunque dei sistemi di valori sufficientemente piccoli che si hanno successivamente per le $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ nel tempo che esse tendono a zero, è chiaro che si potrà trovare un numero m tale che pei sistemi di valori scelti per le δ_s e δ'_s, e pei valori di n e n' non inferiori a m le somme corrispondenti $\sum_1^n \delta_s f_s$, $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s$ differiscano respettivamente dalle somme S_δ, $S_{\delta'}$ delle due serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, $\sum_1^\infty \delta'_s f'_s$ meno di quel numero che più ci piace σ, e quindi per n e n' superiori a m si potrà sempre scrivere:

$$S_\delta - S_{\delta'} = \sum_1^n \delta_s f_s - \sum_1^{n'} \delta'_s f'_s + 2k_n\sigma,$$

essendo k_n un numero compreso fra -1 e 1.

Si scelgano ora le $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n, \dots, \delta'_1, \delta'_2, \dots \delta'_n, \dots$ tutte inferiori a un numero dato arbitrariamente piccolo ε, e tali che le due somme $\sum_1^\infty \delta_s D_s$, $\sum_1^\infty \delta'_s D'_s$ siano ambedue inferiori a σ; e i numeri n e n', oltre a prendersi ambedue superiori al valore di m corrispondente ai valori che si considerano per le $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n, \dots, \delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{n'}, \dots$, si prendano in modo che le due somme $\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_n$, $\delta'_1 + \delta'_2 + \dots + \delta'_{n'}$ siano uguali tra loro, o tutt'al più differiscano l'una dall'altra meno di ε.

Allora, siccome l'ipotesi fatta che $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$ porta, come si disse sopra, che la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione fra due numeri finiti qualunque, e che quindi si possa applicare la formola (36) per modo da avere:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n} f(x)dx + k'_n\sigma, \quad \sum_1^{n'} \delta'_s f'_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta'_1+\delta'_2+\dots+\delta'_{n'}} f(x)dx + k''_n\sigma,$$

con k'_n e k''_n compresi fra -1 e 1, si vede subito che le due somme $\sum_1^n \delta_s f_s$, $\sum_1^{n'} \delta'_s f'_s$ differiranno fra loro meno della quantità $2\sigma + \varepsilon L$, essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$

fra α e ∞, e perciò S_δ e $S_{\delta'}$ differiranno fra loro meno di $4\sigma + \varepsilon L$; dunque pel solito teorema sui limiti del §. 22, si può evidentemente concludere che le somme S_δ o $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ avranno un limite determinato e finito; e quindi, per quanto si è detto nel caso precedente, si avrà ancora:

$$\int_\alpha^\infty f(x)dx = \lim \sum_1^\infty \delta_s f_s ,$$

talchè il teorema enunciato sopra può dirsi ora completamente dimostrato.

250. Dalla dimostrazione che abbiamo data del teorema precedente non risulta che la formola (35) sia applicabile tutte le volte che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito, ma solo in forza di questa dimostrazione si può essere sicuri che la formola stessa è giusta quando si sappia che almeno per quei sistemi di valori speciali delle $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ che in essa figurano la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ ha un limite determinato e finito, o sapendo soltanto che essa è convergente si sappia altresì che la serie $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ ha per limite lo zero.

Questo risultato però può essere reso più completo giacchè si può dimostrare che *quando la funzione $f(x)$ fra α e ∞ è sempre numericamente inferiore a un numero finito, e l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito, esistono sempre infiniti modi di formazione degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ tali che facendoli convergere a zero conservando sempre nei differenti loro stati la stessa legge di formazione, la serie $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ ha per limite lo zero, e la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ si mantiene sempre convergente, e quindi ha per limite l'integrale stesso $\int_\alpha^\infty f(x)dx$.*

Formati infatti gli infiniti intervalli i cui estremi sono nei punti successivi α, $\alpha+d$, $\alpha+2d,\ldots$, $\alpha+rd$, $\alpha+(r+1)d,\ldots$ ove d è un numero qualunque positivo e finito, si osserverà che quando, come noi abbiamo supposto, $f(x)$ è sempre finita e l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito, come anche più generalmente quando la funzione $f(x)$ è finita e atta all'integrazione in ogni intervallo finito, la funzione $f(x)$ sarà atta alla integrazione anche in ciascuno degli intervalli finiti $(\alpha,\ \alpha+d)$, $(\alpha,\ \alpha+d,\ \alpha+2d),\ldots,(\alpha+rd,\ \alpha+(r+1)d),\ldots$; e quindi si potrà evidentemente trovare un numero ε_1 differente da zero e tale che scomponendo in un modo qualunque l'intervallo $(\alpha,\ \alpha+d)$ in intervalli δ_1, $\delta_2,\ldots\delta_{m_1}$ tutti inferiori a ε_1 la somma corrispondente $\sum_1^{m_1}\delta_s D_s$ sia sempre inferiore a un numero positivo comunque piccolo σ_1; similmente si potrà trovare un numero ε_2 differente da zero e tale che scomponendo in un modo qualunque l'intervallo $(\alpha+d,\ \alpha+2d)$ in intervalli parziali δ_{m_1+1}, $\delta_{m_1+2},\ldots,\delta_{m_2}$ tutti inferiori a ε_2 la somma corrispondente $\sum_{m_1+1}^{m_2}\delta_s D_s$ sia sempre inferiore a σ_1^2; e in generale si potrà trovare un numero ε_{r+1} differente da zero e tale che scomponendo in un modo qualunque l'intervallo $(\alpha+rd,\ \alpha+(r+1)d)$ in intervalli parziali δ_{m_r+1}, $\delta_{m_r+2},\ldots,\delta_{m_{r+1}}$ tutti inferiori a ε_{r+1} la somma corrispondente $\sum_{m_r+1}^{m_{r+1}}\delta_s D_s$ sia sempre inferiore a σ_1^{r+1}; e allora, col sistema dei valori δ_1, $\delta_2,\ldots,\delta_{m_1}$, δ_{m_1+1}, $\delta_{m_1+2},\ldots\delta_{m_2},\ldots$ così ottenuti per le δ_s, qualunque sia il numero intiero p si avrà sempre $\sum_1^p\delta_s D_s<\sigma_1+\sigma_1^2+\ldots$, ovvero $\sum_1^p\delta_s D_s<\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$, giacchè σ_1 oltre a prendersi inferiore a uno può anche supporsi piccolissimo; quindi, osservando ora che la serie $\sum_1^\infty\delta_s D_s$ verrà ad essere formata in modo tale che la somma di

un numero qualunque dei termini che seguono p. es. l'm_r^0 sarà sempre minore di un numero $\frac{\sigma_1^{r+1}}{1-\sigma_1}$ che per r abbastanza grande può rendersi inferiore a quel numero che più ci piace, o anche osservando che la serie stessa è a termini positivi e la somma di un numero qualunque dei suoi primi termini non supera mai $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$, si conclude che la serie stessa per gli indicati valori delle $\delta_1, \delta_2, \delta_3..$ sarà sempre convergente, e la sua somma, essendo inferiore a $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$, avrà per limite zero quando le δ_s si facciano impiccolire indefinitamente seguendo la suindicata legge di formazione; talchè resta con ciò intanto dimostrato che quando $f(x)$ è finita e atta all'integrazione nell'intervallo (α, ∞), o anche soltanto in ogni intervallo finito compreso in esso, si possono sempre trovare infiniti sistemi di valori per le $\delta_1, \delta_2, \delta_n, \ldots$ pei quali si ha $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$.

Dimostrata così l'esistenza di questi sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, prendiamo ora uno qualunque di questi sistemi, o anche più generalmente un sistema qualunque di valori pei quali la somma $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ sia convergente; e considerando la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$, corrispondente a questi valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, ..$ formiamo la somma $\sum_{p+1}^q \delta_s f_s$ di un numero qualunque dei suoi termini dopo il p^0.

Si avrà:

$$\sum_{p+1}^q \delta_s f_s = \int_{\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_p}^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_q} f(x)dx + k' \sum_{p+1}^q \delta_s D_s ,$$

essendo k' un numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 incl.); e in questa formola, quando p sia abbastanza grande e qualunque sia q, la somma $\sum_{p+1}^q \delta_s D_s$ sarà minore di quel numero che più ci piace, e lo stesso accadrà dell'integrale che vi comparisce quando si

torni ad ammettere che $f(x)$ sia finita e atta alla integrazione fra α e ∞, giacchè esso non verrà ad essere altro che un integrale definito singolare relativo alla funzione $f(x)$; dunque evidentemente le somme di un numero qualunque di termini dopo un certo termine p^0 nella serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ saranno minori di quel numero che più ci piace, e si può quindi concludere intanto che quando $f(x)$ è sempre finita e l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito, se le δ_s sono scelte in modo che la serie $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ sia convergente, anche la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ corrispondente agli stessi valori delle δ_s sarà convergente.

Questo, per il teorema precedente, basta anche per dire che la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ ha un limite determinato quando le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ tendono a zero conservando sempre la stessa legge di formazione nei successivi loro stati, e questo limite è precisamente l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$; talchè resta ora completamente dimostrato il teorema enunciato sopra.

251. Merita poi di essere notato come nella dimostrazione del teorema precedente non sia escluso che i numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r, \ldots$ che ivi compariscono possano andare successivamente diminuendo, e anche tendere a zero; e quando ciò avvenga non si potrà trovare un numero ε che oltre essere positivo e differente da zero sia tale che per ogni sistema di valori delle δ_s inferiori a ε si abbia sempre $\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma$, ec. talchè nel caso degli intervalli d'integrazione di ampiezza infinita, quand'anche l'integrale corrispondente $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ sia determinato e finito, non può assicu-

rarsi che la somma $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ abbia per limite zero per qualunque sistema d'intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — Si aggiunge che la condizione $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$, nel caso degli intervalli d'integrazione infiniti, non è più condizione sufficiente per la integrabilità della funzione corrispondente $f(x)$ fra α e ∞, almeno finchè sia verificato soltanto che questa condizione è soddisfatta per alcuni sistemi di valori speciali degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$; inquantochè, secondo i teoremi precedenti, onde assicurare che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ è determinato e finito, oltre alla indicata condizione, si richiede sempre l'altra che la serie corrispondente $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ abbia anch'essa un limite determinato e finito, o almeno sia convergente, ec...; e del resto effettivamente, dimostrando il teorema precedente abbiamo visto che esistono sempre dei sistemi speciali di intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$, pei quali la condizione $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$ si verifica anche quando la funzione è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, senza bisogno che lo sia anche nell'intervallo infinito; talchè in forza di quanto si disse al §. 184 si riscontra ora una differenza fortissima fra il caso degli integrali presi fra limiti finiti e quelli presi fra limiti infiniti.

252. A questo proposito però si può ora osservare che, secondo quanto dicemmo per dimostrare il teorema precedente, *se l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ avrà un valore determinato e finito, per tutti quei sistemi di valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ per le quali la serie $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ è convergente, anche l'altra $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ sarà convergente;* e siccome per qualunque valore finito di n si ha la formola:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n} f(x)dx + k'_n \sum_1^n \delta_s D_s ,$$

con k'_n compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 inclus.), così nel caso attuale sarà:

$$(37) \qquad \sum_1^\infty \delta_s f_s = \int^\infty f(x)dx + k_\delta \sum_1^\infty \delta_s D_s ,$$

essendo k_δ un altro numero *determinato* compreso anch'esso fra -1 e 1 (-1, e 1 incl.).

E se al tempo stesso sarà $\lim \sum_1^\infty \delta_s D_s = 0$, allora si avrà anche:

$$\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \int_\alpha^\infty f(x)dx ;$$

come se, avendosi ancora per certi sistemi di valori delle δ_1, $\delta_2, \ldots$ $\delta_n, \ldots$ $\lim \sum \delta_s D_s = 0$, invece di sapere che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ è determinato e finito si saprà che per gli stessi sistemi di valori speciali delle δ_1, $\delta_2, \ldots$ $\delta_n, \ldots$ la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è convergente, allora pel teorema del §. 249 si potrà asserire che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ è determinato e finito e si verrà ancora ad avere la formola precedente (37).

253. A complemento poi dei risultati quì esposti troviamo ora opportuno di aggiungere che *quando la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, e a partire da un certo valore di x fino all'infinito, nei punti ove non è zero la funzione stessa ha sempre il medesimo segno, come p. e. il segno positivo,* allora *tutte le volte che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ è infinito, anche la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ sarà infinita o almeno avrà per limite l'infinito quando le δ_s si prendono con una legge qualsiasi, e viceversa.*

È chiaro infatti che se a partire da un certo valore x' di x fino all'infinito la funzione $f(x)$ è positiva o nulla, e l'integrale

$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ha per limite l'infinito per $\beta=\infty$, ciò vuol dire che coll'impiccolire ognor più delle $\delta_1, \delta_2, .., \delta_n, ..$ le somme $\sum_1^n \delta_s f_s$, ove δ_n è l'ultimo degli intervalli $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n, ...$ il cui estremo inferiore non supera β, finiranno per essere maggiori di qualunque quantità data, e le somme complementari $\sum_{n+1}^\infty \delta_s f_s$ avendo i loro termini positivi li accresceranno ancor più, per modo che si avrà $\sum_1^\infty \delta_s f_s = \infty$, o almeno $\lim \sum_1^\infty \delta_s f_s = \infty$.

Invece se con qualunque sistema di valori delle δ_s la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ è infinita o ha per limite l'infinito, allora si osserverà prima che ciò dovrà pure accadere quando per le δ_s si prendono quei sistemi di valori pei quali si ha $\lim \Sigma \delta_s D_s = 0$, l'esistenza dei quali fu dimostrata in principio del §. 250, e quindi anche per questi sistemi di valori delle δ_s si potrà trovare un numero n tale che la somma $\sum_1^n \delta_s f_s$ sia maggiore di quel numero che più ci piace, e il numero $\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n$ sia maggiore di x'.

Ma allora, siccome si ha sempre:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\,..\,+\delta_n} f(x)dx + k'_n \sum_1^n \delta_s D_s, \tag{38}$$

essendo k'_n il solito numero compreso fra -1 e 1 (-1 e 1 incl.) è evidente che l'integrale del secondo membro sarà anch'esso maggiore di qualsiasi numero dato, e tale si manterrà anche se al posto del suo limite superiore si pone un numero maggiore, perchè da x' in poi la funzione $f(x)$ è sempre positiva; dunque in questo caso è forza concludere che $\lim \int_\alpha^\beta f(x)dx = \infty$, e con ciò il teorema resta completamente dimostrato.

254. Inoltre a speciale complemento del teorema del §. 250,

si può aggiungere che *quando la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, ma l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ è infinito o indeterminato, necessariamente vi saranno dei sistemi di valori delle δ_s per le quali la serie $\sum_1^n \delta_s f_s$, non solo ha per limite l'infinito o manca di limite determinato, ma è infinita respettivamente o indeterminata anche fuori del limite,* giacchè se le δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ sono scelte in modo che si abbia $\sum_1^\infty \delta_s D_s < \sigma$, ciò che come sappiamo potrà sempre farsi, per questi valori delle $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ la formola (38) ci darà:

$$\sum_1^n \delta_s f_s = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n} f(x)dx + k''_n\sigma, \tag{39}$$

con k'_n compreso ancora fra -1 e 1; e quindi se sarà $\int_\alpha^\infty f(x)dx = \infty$, passando al limite per $n=\infty$ si otterrà evidentemente: $\lim \sum_1^n \delta_s f_s = \infty$.

Se poi l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ non sarà determinato, allora l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ col crescere indefinito di β finirà per oscillare fra due limiti che saranno finiti o uno almeno dei quali crescerà indefinitamente, e quindi per quanto grande divenga il β, lo stesso integrale non cesserà mai di prendere anche valori discosti fra loro più di una certa quantità d superiore a 2σ. Osservando dunque che col crescere indefinito di n quando le δ_s saranno già divenute inferiori a ε, il limite superiore dell'integrale $\int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\ldots+\delta_n} f(x)dx$ passerà vicino quanto si vuole a qualsiasi numero β, e quindi l'integrale

stesso differirà dall'altro $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ meno di ε L, essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e ∞, s' intende subito, a causa della formola (39), che nel caso attuale la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ si manterrà sempre indeterminata mentre le δ_s convergono indefinitamente a zero secondo la legge indicata, e così resta dimostrata completamente la proprietà enunciata.

A questo poi si può aggiungere che per la prima parte del teorema del §. 249, quando l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ non ha un valore determinato e finito, non ostante che $f(x)$ sia finita e atta alla integrazione in qualunque intervallo finito, la serie $\sum_1^\infty \delta_s f_s$ dovrà avere un limite infinito o mancare assolutamente di limite anche per quei sistemi di valori delle δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ pei quali essa è convergente fuori del limite.

255. Dimostrati ora questi teoremi, noi possiamo dire evidentemente di avere risposto alle questioni sollevate al §. 248 intorno alla definizione degli integrali estesi a intervalli di ampiezza infinita, come possiamo dire di avere già fatte quelle estensioni dei teoremi 7.° e 8.° del §. 190 delle quali parlammo in principio del §. 248 stesso.

Teniamo conto infatti dei teoremi 7.° e 8.° del §. 190, o dei corrispondenti modificati come si disse in nota al §. 249, e teniamo conto della formola (37), che come già abbiamo detto sussiste tutte le volte che l' integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito, e se non per tutti i sistemi di valori delle δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_n \ldots$ almeno finchè esse sono formate con leggi determinate. Con ciò noi potremo immediatamente concludere che *quando $f(x)$ è finita e atta alla integrazione fra α e ∞, indicando con k_1, $k_2, \ldots . k_\delta$ numeri* determinati *compresi fra* -1 *e* 1 (-1 *e* 1 *inclus.*) *si hanno sempre le formole seguenti*:

$$\delta_1 f_1 = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1} f(x)dx + k_1 \sum_1^\infty \delta_s D_s,$$

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 = \int_\alpha^{\alpha+\delta_1+\delta_2} f(x)dx + k_2 \sum_1^\infty \delta_s D_s,$$

. . . .

$$\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \delta_3 f_3 + \ldots = \sum_1^\infty \delta_s f_s = \int_\alpha^\infty f(x)dx + k_\delta \sum_1^\infty \delta_s D_s,$$

tutte le volte che le $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ *costituiscono un sistema di valori pei quali la serie* $\sum_1^\infty \delta_s D_s$ *è convergente; e di tali sistemi di valori delle* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ *ne esiste sempre un numero infinito;* e questo evidentemente estende appunto i teoremi 7.° e 8.° del §. 190.

256. Per estendere anche i teoremi dei §§. 191 e seguenti, diciamo prima che noi d'ora innanzi riguarderemo il $+\infty$ e il $-\infty$ come valori speciali di x pei quali una funzione $f(x)$ potrà avere un valore determinato finito o infinito che indicheremo respettivamente con $f(\infty)$ o con $f(-\infty)$; e diciamo anche che una funzione $f(x)$ data in un intervallo infinito sarà riguardata come continua per $x=\infty$ o per $x=-\infty$, quando il limite dei suoi valori preso per $x=\infty$ o per $x=-\infty$ sia determinato, essendo però finito o infinito, e sia il valore corrispondente della funzione $f(\infty)$ o $f(-\infty)$.

Allora con leggiere modificazioni in qualche enunciato le proprietà date ai §§. 43 e seg. per le funzioni finite e continue in un intervallo finito si estenderanno anche alle funzioni finite e continue in un intervallo infinito; come si estenderanno pure quelle proprietà che abbiamo dato nel capitolo precedente intorno alle derivate e agli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali; e in particolare estendendo le proprietà che si dettero al §. 149 si scorge subito che se, trattandosi p. es. dell'intervallo (α, ∞), si troverà che per $x=\infty$ uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali ha un limite determinato (finito o infinito), allora altrettanto accadrà anche degli altri estremi oscillatorii, giacchè

se p. es. il detto limite è finito ed è A, quando β sia sufficientemente grande, e γ sia un numero qualunque positivo, fra β e $\beta+\gamma$ tutti quanti gli estremi oscillatorii differiranno da A tanto poco quanto si vuole (§. 146) e quindi avranno per limite A. E perciò, seguendo l'analogia con quel che accade pei valori finiti di x, nel caso che uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di una funzione finita e continua $f(x)$, o la sua derivata a destra o quella a sinistra quando esistono, abbiano un limite determinato per $x=\infty$, chiameremo questo limite *la derivata di $f(x)$ per $x=\infty$*.

257. Ammesse ora queste definizioni, da quanto si dimostrò nel §. 231 e dalla definizione degli integrali presi in intervalli di ampiezza infinita, si dedurrà immediatamente che *se $f(x)$ è una funzione atta alla integrazione fra α e ∞ o fra α e $-\infty$, o fra $-\infty$ e ∞, gli integrali $\int_\alpha^x f(x)dx$, $\int_{-\infty}^x f(x)dx$, $\int_{-\infty}^x f(x)dx$, considerati come funzioni di x saranno funzioni finite e continue per tutti i valori di x che cadono negli intervalli corrispondenti* (α, ∞), $(-\infty, \alpha)$, $(-\infty, \infty)$, *e in particolare anche per $x=\infty$ o $x=-\infty$.*

Si osservi poi che, considerando p. es. l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ e ponendo $F(x)=\int_\alpha^x f(x)dx$, si vede subito che, per valori finiti di x con h sufficientemente piccolo in valore assoluto si avrà:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\theta_{x,h},$$

essendo $\theta_{x,h}$ un numero compreso fra il limite superiore e inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo $(x, x+h)$, talchè gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali p. es. destri di $F(x)$ nel punto x saranno compresi fra i limiti entro cui varia $f(x)$ mentre x passa da x a un punto a destra comunque vicino $x+h$. Si dedurrà immediatamente da ciò che *se $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e ∞, e per $x=\infty$ è finita e continua, l'integrale $\int_\alpha^x f(x)dx$ oltre essere una funzione di x finita e continua per tutti i valori di x*

fra α *e* ∞ (∞ *incl.*) *godrà anche della proprietà di avere la sua derivata determinata e uguale a* $f(\infty)$ *anche per* $x=\infty$; e resterà così pienamente estesa anche la proprietà degli integrali definiti $\int_\alpha^x f(x)dx$ che assegna loro per derivata $f(a)$ in tutti i punti a nei quali $f(x)$ è continua, ec.... (§. 232).

258. Si aggiunge poi che, trattandosi sempre p. es. dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$, si può ora estendere anche il teorema del §. 233 dicendo che *se* $f(x)$ *è una funzione atta alla integrazione in qualunque porzione finita dell'intervallo* (α, ∞), *e se al tempo stesso* $F(x)$ *è una funzione che è finita e continua per tutti i valori di* x *in questo intervallo non escluso il valore* ∞, *e per tutti i valori finiti di* x *rappresenta l'integrale* $\int_\alpha^x f(x)dx$ *all'infuori di una costante, per modo che si ha sempre:*

$$F(x)-F(\alpha)=\int_\alpha^x f(x)dx, \tag{40}$$

allora *la funzione* $f(x)$ *sarà atta alla integrazione anche nell'intervallo infinito* (α, ∞), *e la formola* (40) *sussisterà anche per* $x=\infty$ *per modo cioè che si avrà:*

$$F(\infty)-F(\alpha)=\int_\alpha^\infty f(x)dx;$$

giacchè evidentemente sussistendo sempre la (40) per tutti i valori finiti di x, e il suo primo membro per $x=\infty$ avendo un limite determinato e finito $F(\infty)-F(\alpha)$, altrettanto accadrà del secondo membro, e perciò l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ avrà un valore determinato e finito che sarà appunto $F(\infty)-F(\alpha)$.

259. Questa osservazione potrà talvolta essere utile per riconoscere se una funzione $f(x)$, atta alla integrazione in ogni por-

zione finita di un intervallo infinito (α, ∞), sia tale anche in questo intervallo (α, ∞). Essa poi evidentemente permette subito di asserire che *se $f(x)$ è una funzione finita e continua fra α e ∞ (∞ inclus.), e in ogni punto x a distanza finita ammette p. es. una derivata a destra determinata d_x o anche soltanto un estremo oscillatorio λ_x dotato delle proprietà che si richiedono* (§§. 234 e seg.) *perchè per ogni valore finito di x si abbia:*

$$(41) \qquad f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x d_x dx, \quad \text{o} \quad f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x \lambda_x dx,$$

allora si avrà anche:

$$f(\infty)-f(\alpha)=\int_\alpha^\infty d_x dx, \quad \text{o} \quad f(\infty)-f(\alpha)=\int_\alpha^\infty \lambda_x dx,$$

vale a dire la formola (41) *sussisterà anche per $x=\infty$.*

260. Osservazioni del tutto simili a quelle che abbiamo fatte nei §§. 197°, 198°, 199°, e 238.° pel caso degli intervalli di integrazione di ampiezza finita, noi potremmo farle ora anche pel caso degli intervalli di ampiezza infinita; e così riassumendo noi possiamo affermare che " ciò che accade dal lato della integrabilità " in un intervallo finito o infinito per le derivate a destra, o più " generalmente per un estremo oscillatorio di una funzione finita " e continua nello stesso intervallo, accade pure per le derivate a " sinistra (quando esistono) o per gli altri estremi oscillatorii, e ciò quand'anche la detta derivata o il detto estremo oscillatorio non siano sempre finiti, intendendo però al solito che nell'intervallo dato o in ogni sua porzione finita (se è infinito) le dette quantità se divengono infinite lo divengano soltanto in gruppi di punti di prima specie.

E si può aggiungere che " se nell'intervallo finito o infinito " nel quale si considera, uno degli estremi oscillatorii relativi a " una funzione finita e continua è d'integrale nullo (essendo ancora " finito, o infinito nei soliti gruppi di punti di prima specie), " accadrà lo stesso degli altri estremi oscillatorii, e la funzione " sarà sempre costante "; e " se due funzioni finite e continue in " un dato intervallo finito o infinito saranno tali che uno degli

" estremi oscillatorii della prima e uno di quelli della seconda siano
" atti alla integrazione (essendo al solito finiti o infiniti) e siano
" uguali fra loro o tutt'al più differiscano per una funzione d'in-
" tegrale nullo, le due funzioni saranno uguali o differiranno fra
" loro per una quantità costante ".

Inoltre si può dire che " quando una funzione $f(x)$ finita o
" infinita nell'intervallo finito o infinito nel quale si considera è
" atta alla integrazione, la ricerca della funzione integrale $F(x)$
" per la quale si ha:

$$F(x)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx,$$

" si ridurrà sempre a quella di una funzione finita e continua di
" cui un estremo oscillatorio sia uguale a $f(x)$, o ne differisca per
" una funzione d'integrale nullo "; e questo risultato generalissimo
riporta evidentemente a tutte le funzioni atte alla integrazione
la definizione d'integrale che si dà ordinariamente nei trattati,
col sostituire però alle derivate della funzione integrale gli estremi
oscillatorii dei suoi rapporti incrementali, ec....

261. Cercando di estendere il teorema del §. 204 si trova che:
*se, essendo α un numero finito, o essendo $\alpha=-\infty$ la funzione $f(x)$
è finita e atta alla integrazione fra α e ∞, e per ogni valore finito
di x e superiore ad α si ha:*

$$a<\int_{\alpha}^{x} f(x)dx<A;$$

*e $\varphi(x)$ è un altra funzione di x che da α a ∞ è sempre positiva e
finita e non và mai crescendo, la funzione $f(x)\varphi(x)$ sarà atta alla
integrazione fra α e ∞ (§. 245) e si avrà:*

$$(42)\qquad a\varphi(\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx\leq A\varphi(\alpha),$$

per ogni valore di x compreso fra α e ∞ (α e ∞ inclus.).

Supponendo infatti dapprima che α sia finito, e osservando
che per ogni valore finito di x si ha (§. 204):

$$a\varphi(\alpha)<\int_{\alpha}^{x} f(x)\varphi(x)dx<A\varphi(\alpha),$$

e che l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx$ ha per valore determinato e finito (§. 245), si intende subito che questo integrale potrà tutt'al più eguagliare uno dei limiti estremi $a\varphi(\alpha)$, $A\varphi(\alpha)$, ma non mai uscire dagli stessi limiti, e quindi per α finito si avrà la formola (42).

Se poi $\alpha = -\infty$, essendo ancora $a < \int_{-\infty}^x f(x)dx < A$, allora per qualunque valore positivo e finito ma comunque grande di β, e per qualunque valore finito di x superiore a $-\beta$, si avrà:

$$a - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx < \int_{-\beta}^x f(x)dx < A - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx,$$

e quindi sarà (§. 204):

$$\left\{a - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx\right\}\varphi(-\beta) < \int_{-\beta}^x f(x)\varphi(x)dx < \left\{A - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx\right\}\varphi(-\beta);$$

e poichè il prodotto $f(x)\varphi(x)$ è atto alla integrazione fra $-\infty$ e ∞ (§. 245), si potrà anche scrivere:

$$\left\{a - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx\right\}\varphi(-\beta) + \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\varphi(x)dx < \int_{-\infty}^x f(x)\varphi(x)dx <$$

$$< \left\{A - \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx\right\}\varphi(-\beta) + \int_{-\infty}^{-\beta} f(x)\varphi(x)dx;$$

talchè, coll'osservare che per $\beta = \infty$ l'integrale $\int_{-\infty}^{-\beta} f(x)dx$ ha per limite zero, e $\varphi(-\beta)$ ha un limite determinato e finito $\varphi(-\infty)$, e che in conseguenza il primo e l'ultimo termine di questa formola differiscono tanto poco quanto si vuole da $a\varphi(-\infty)$ e da $A\varphi(-\infty)$ respettivamente, si vede subito che per qualunque valore finito di x sarà:

$$a\varphi(-\infty) \leq \int_{-\infty}^x f(x)\varphi(x)dx \leq A\varphi(-\infty);$$

donde facendo crescere x indefinitamente per valori positivi si troverà ancora la formola (42) quando in essa è supposto $\alpha=-\infty$.

262. Una estensione simile potrebbe farsi dei teoremi dei §§. 205, 206 e 207; e in particolare estendendo le considerazioni dei §§. 211 e 212 si può ora affermare che: *se, essendo α un numero finito o essendo $\alpha=-\infty$, la funzione $f(x)$ fra α e ∞ è finita e atta alla integrazione, e passando x da α a ∞ la funzione $\varphi(x)$ non è mai negativa e non và mai crescendo, si avrà la formola:*

$$\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx=\varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)dx,$$

essendo x' un valore determinato di x compreso fra α e ∞.

Di quì poi coi ragionamenti del §. 213 si trarrà la estensione della formola di Weierstrass del §. 213 stesso al caso in cui nell'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)dx$ uno o tutti e due i limiti sono infiniti; giacchè se $\beta=\infty$, e $\varphi(x)$ non và mai decrescendo da α a ∞, essendo però sempre inferiore a un numero finito, allora, tanto nel caso di α finito quanto in quello di $\alpha=-\infty$, applicando la formola precedente col cangiarvi $\varphi(x)$ in $\varphi(\infty)-\varphi(x)$, si troverà l'altra:

$$\int_\alpha^\infty f(x)\{\varphi(\infty)-\varphi(x)\}dx=\{\varphi(\infty)-\varphi(\alpha)\}\int_\alpha^{x'} f(x)dx,$$

ovvero:

$$\int_\alpha^\infty f(x)\varphi(x)dx=\varphi(\alpha)\int_\alpha^{x'} f(x)dx+\varphi(\infty)\int_{x'}^\infty f(x)dx,$$

ove x' è un valore di x compreso fra α e ∞; e nel caso che la funzione $\varphi(x)$ da α a ∞ non vada mai crescendo, restando però sempre inferiore in valore assoluto a un numero finito, allora applicando le formole trovate col cangiarvi $\varphi(x)$ in $\varphi(\alpha)-\varphi(x)$, si otterrà l'altra:

$$\int_\alpha^\infty f(x)\{\varphi(\alpha)-\varphi(x)\}dx=\{\varphi(\alpha)-\varphi(\infty)\}\int_{x'}^\infty f(x)dx,$$

ovvero:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{x'} f(x)dx + \varphi(\infty)\int_{x'}^{\infty} f(x)dx,$$

per modo che si può dire che la formola di Weierstrass:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_{\alpha}^{x'} f(x)dx + \varphi(\beta)\int_{x'}^{\beta} f(x)dx,$$

che noi abbiamo data al §. 213 sussiste per qualunque intervallo finito o infinito (α, β) $\{\alpha = -\infty$ e $\beta = \infty$ incl.$\}$ tutte le volte che da α a β la funzione $f(x)$ è finita e atta alla integrazione, e la funzione $\varphi(x)$ è sempre numericamente inferiore a un numero finito e non và mai crescendo o non và mai decrescendo.

263. I teoremi dei §§. 211 e seg. che ora abbiamo estesi al caso in cui uno dei limiti dell'integrale che si considera sia infinito, applicati agli integrali definiti singolari possono talvolta servire utilmente anche per riconoscere se una funzione sia atta o nò alla integrazione fra limiti infiniti. Oltre poi a questi teoremi si ha anche il seguente che è del tutto simile a quello che si dette al §. 239, e che serve benissimo allo scopo ora indicato in un immenso numero di casi.

Se la funzione $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e un numero finito ma grande quanto si vuole e positivo β, l'integrale $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ avrà un valore determinato e finito tutte le volte che la funzione stessa $f(x)$ per $x=\infty$ diviene infinitesima di ordine superiore o uguale o anche soltanto non minore (§. 27) *di quello di una qualunque delle funzioni:*

$$\frac{1}{x^{1+\mu}},\ \frac{1}{x(\log x)^{1+\mu}},\ \frac{1}{x\log x(\log^2 x)^{1+\mu}},\dots$$

nelle quali μ è un numero determinato differente da zero e positivo; e lo stesso integrale sarà invece infinito tutte le volte che la funzione $f(x)$ a partire da un certo valore di x fino all'infinito non cangia mai di segno, e col crescere indefinito di x si mantiene discosta da zero più di una quantità determinata, o diviene infini-

tesima di ordine inferiore o uguale o anche soltanto non maggiore di quello di una qualunque delle funzioni:

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x\log x},\ \frac{1}{x\log x\log^2 x},\ldots.$$

La dimostrazione di questo teorema si fà con ragionamenti del tutto simili a quelli del §. 239.

Per la prima parte infatti si osserva che, dietro le ipotesi fatte, esisterà un numero β' tale che per tutti i valori di x che gli sono superiori una delle quantità:

$$f(x)x^{1+\mu},\quad f(x)x(\log x)^{1+\mu},\quad f(x)x\log x(\log^2 x)^{1+\mu},\ldots.$$

sarà sempre numericamente inferiore a una quantità finita e positiva c, e quindi per $\beta>\beta'$ e γ qualunque ma positivo, l'integrale definito singolare $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)dx$ sarà numericamente inferiore a una delle quantità:

$$c\int_\beta^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x^{1+\mu}},\quad c\int_\beta^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x(\log x)^{1+\mu}},\quad c\int_\beta^{\beta+\gamma}\frac{dx}{x\log x(\log x)^{1+\mu}},\ldots;$$

talchè, osservando anche che queste quantità sono respettivamente uguali alle altre:

$$\frac{c}{\mu}\left(\frac{1}{\beta^\mu}-\frac{1}{(\beta+\gamma)^\mu}\right),\quad \frac{c}{\mu}\left\{\frac{1}{(\log\beta)^\mu}-\frac{1}{[\log(\beta+\gamma)]^\mu}\right\}$$
$$\frac{c}{\mu}\left\{\frac{1}{(\log^2\beta)^\mu}-\frac{1}{[\log^2(\beta+\gamma)]^\mu}\right\},\ldots$$

che per β crescente indefinitamente tendono a zero qualunque sia il numero positivo γ, si concluderà subito che altrettanto accade dell'integrale definito singolare suindicato $\int_\beta^{\beta+\gamma} f(x)dx$, e in conseguenza l'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ ha un valore determinato e finito.

Per dimostrare ora anche la seconda parte del teorema enunciato, osserviamo che, per le ipotesi fatte, a partire da un certo

valore finito γ di x la funzione $f(x)$ col crescere sempre più di x non passerà mai per zero e conserverà sempre lo stesso segno, e poichè indicando con β un numero qualunque maggiore di γ si può scrivere:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx,$$

per avere il valore dell'integrale $\int_\alpha^\infty f(x)dx$ basterà cercare il limite dell'integrale $\int_\gamma^\beta f(x)dx$ per $\beta = \infty$.

Ma indicando con c una quantità differente da zero e positiva, sempre per le ipotesi fatte, si vede subito che l'integrale $\int_\alpha^c f(x)dx$ è numericamente maggiore di una delle quantità:

$$\int_\gamma^\beta dx,\quad c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x},\quad c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x\log x},\quad c\int_\gamma^\beta \frac{dx}{x\log x \log^2 x},\ldots.$$

le quali sono respettivamente uguali alle altre:

$$c(\beta-\gamma),\quad c(\log\beta-\log\gamma),\quad c(\log^2\beta-\log^2\gamma),\quad c(\log^3\beta-\log^3\gamma),\ldots$$

che crescono indefinitamente con β; quindi si conclude che $\lim_{\beta=\infty}\int_\gamma^\beta f(x)dx = \pm\infty$, e perciò $\int_\alpha^\infty f(x)dx = \pm\infty$, e questo dimostra anche la seconda parte del teorema enunciato.

264. È poi da notare che l'ultima parte del teorema dimostrato può effettivamente cessare di sussistere quando, contrariamente a quanto abbiamo supposto nell'enunciato, la funzione $f(x)$ col crescere indefinito di x cangi continuamente di segno.

E infatti, considerando p. es. gli integrali:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx,\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx,\ \int_0^\infty \cos x^2 dx,\ \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx,\ \int_0^\infty \sqrt{x}\cos x^3 dx,\ldots$$

nel primo dei quali b è una costante qualunque diversa da zero,

e nell'ultimo la funzione sotto il segno integrale col crescere indefinito di x prende anche valori indefinitamente grandi numericamente, si trova che essi hanno valori determinati e finiti, giacchè considerando i loro integrali definiti singolari $\int_{\beta}^{\beta+\gamma}$, e applicandovi la integrazione per parti ordinaria, col prendere per fattore differenziale pel primo integrale $\operatorname{sen} bx dx$, pel secondo $\operatorname{sen} x dx$, pel terzo e pel quinto $\cos x^2 2x dx$, e pel quarto $\operatorname{sen} x^2 2x dx$, in forza della prima parte del teorema dimostrato si trova subito che questi integrali definiti singolari hanno tutti per limite zero per $\beta=\infty$, e quindi gli integrali dati hanno tutti valori determinati e finiti (§. 243).

265. Il calcolo degli integrali definiti, e la dimostrazione di alcune loro proprietà, si fanno spesso appoggiandosi sui metodi detti d'integrazione per parti, d'integrazione per sostituzione, e d'integrazione per serie, ed è utile quindi che spendiamo qualche parola anche intorno a ciascuno di questi metodi successivamente, esponendoli con tutta la generalità di cui essi sono suscettibili.

Siano perciò u e v due funzioni di x finite e continue in tutto un intervallo (α, β) che dapprima supporremo di ampiezza finita; e indicando con λ_u uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di u, e con λ_v uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di v in questo intervallo, supponiamo che questi estremi oscillatorii λ_u e λ_v siano atti alla integrazione nell'intervallo stesso (α, β); e se sono infiniti in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, ammettiamo di avere verificato che negli intervalli nei quali sono finiti (e quindi anche in tutto l'intervallo (α, β) §. 248) essi sono atti alla integrazione, e che uno almeno dei prodotti $u\lambda_v$ e $v\lambda_u$ resta atto alla integrazione anche in intorni dei punti d'infinito di λ_u o λ_v (*).

(*) Giova notare che la condizione che qui poniamo che λ_u e λ_v siano atti alla integrazione fra α e β, dietro quanto si disse ai §§. 197, 198, 238 equivale all'altra che u e v siano funzioni di x della forma:

$$u=a+\int_{\alpha}^{x} u_1 dx, \quad v=b+\int_{\alpha}^{x} v_1 dx,$$

ove a e b sono costanti, e u_1 e v_1 sono funzioni di x atte all'integrazione fra α e β le

Con queste condizioni dico che si avrà sempre la formola:

$$(43)\qquad \int_\alpha^\beta u\lambda_v dx = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v\lambda_u dx,$$

alla quale può sostituirsi anche l'altra:

$$(44)\qquad \int_\alpha^\beta u\mathrm{V}dx = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v\mathrm{U}dx,$$

ove V e U differiscono da λ_v e λ_u per funzioni d'integrale nullo, e $[uv]_\alpha^\beta$ rappresenta la differenza dei valori del prodotto uv ai limiti α e β degli integrali.

Per dimostrare queste formole che costituiscono il metodo d'integrazione per parti sotto la sua forma più generale, giacchè nel caso che u e v abbiano le loro derivate u' e v' determinate e atte alla integrazione fra α e β si può prendere $\lambda_u = u'$, e $\lambda_v = v'$, e allora si ritrovano le formole ordinarie del Calcolo differenziale, incominceremo dal considerare il caso in cui λ_u e λ_v sono sempre finite fra α e β.

Allora, per le ipotesi fatte, le funzioni $u\lambda_v$, $v\lambda_u$, e così la loro somma $u\lambda_v + v\lambda_u$, saranno atte alla integrazione fra α e β; e, se immaginiamo scomposto l'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, sarà facile vedere che la somma $\sum_1^n (u\lambda_v + v\lambda_u)_s \delta_s$, ove con $(u\lambda_v + v\lambda_u)_s$ abbiamo indicato un valore di $u\lambda_v + v\lambda_u$ compreso fra i limiti inferiore e superiore dei valori di questa quantità

quali non possono allora differire da λ_u e λ_v respettivamente altro che per funzioni d'integrale nullo.

Nè è da dimenticare che se uno degli estremi oscillatorii λ_u dei rapporti incrementali di una funzione finita e continua u è atto alla integrazione fra α e β, anche gli altri estremi oscillatorii per la medesima funzione u godranno della stessa proprietà, e i loro integrali saranno tutti uguali fra loro. E se U e V sono due funzioni che fra α e β sono atte all'integrazione insieme al loro prodotto UV, e U_1 e V_1 non differiscono da U e V altro che per funzioni d'integrale nullo, anche il prodotto $\mathrm{U}_1\mathrm{V}_1$ sarà atto alla integrazione fra α e β, e si avrà:

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{U}_1\mathrm{V}_1 dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{UV}dx.$$

nell'intervallo δ_s, ha per limite la differenza $[uv]_\beta^\alpha$ quando le δ_s convergono a zero.

Per questo ricordiamo che i limiti inferiore e superiore degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ di una funzione $f(x)$ in un dato intervallo comprendono i valori dei rapporti incrementali medesimi nei punti x dello stesso intervallo finchè in questo intervallo sono compresi anche i punti $x+h$; e quindi, se (λ_u) e (λ_v) sono i valori di λ_u e λ_v in un punto di una porzione qualsiasi δ dell'intervallo (α, β) nella quale le oscillazioni di λ_u e λ_v sono respettivamente D e D′, i valori di λ_u e quelli dei rapporti incrementali di u nella stessa porzione saranno compresi fra $(\lambda_u)-\mathrm{D}$ e $(\lambda_u)+\mathrm{D}$, e quelli di λ_v e dei rapporti incrementali di v saranno compresi fra $(\lambda_v)-\mathrm{D}'$ e $(\lambda_v)+\mathrm{D}'$, o in altri termini i primi di questi valori potranno rappresentarsi con $(\lambda_u)+\gamma\mathrm{D}$, e i secondi con $(\lambda_v)+\gamma'\mathrm{D}'$, essendo γ e γ' numeri compresi fra -1 e 1 (-1 e 1 inclus.).

Indicando dunque con d e d' le oscillazioni di u e v nella porzione δ ora indicata, e osservando che se a e b sono gli estremi di questa porzione si ha:

$$\frac{u(b)v(b)-u(a)v(a)}{\delta}=u(b)\,\frac{v(b)-v(a)}{\delta}+v(a)\,\frac{u(b)-u(a)}{\delta}\,,$$

si vede subito che sarà:

$$\frac{u(b)v(b)-u(a)v(a)}{\delta}=u\lambda_v+v\lambda_u+\gamma_1 d(\lambda_v+\gamma'\mathrm{D}')+\gamma_2 d'(\lambda_u+\gamma\mathrm{D})+\gamma' u\mathrm{D}'+\gamma v\mathrm{D},$$

essendo u, v, λ_u, λ_v i valori di queste quantità stesse in un medesimo punto qualsiasi dell'intervallo δ, e essendo γ, γ', γ_1, γ_2 numeri compresi fra -1 e 1 (-1 e 1 incl.); quindi, moltiplicando questa formola per δ, e poi, applicandola a ciascuno degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ nei quali è stato scomposto l'intervallo totale (α, β), e sommando, si troverà subito:

$$u(\beta)v(\beta)-u(\alpha)v(\alpha)=[uv]_\alpha^\beta=\sum_1^n(u\lambda_v+v\lambda_u)_s\,\delta_s+\gamma_0\lambda_{v,0}\sum_1^n\delta_s d_s+$$

$$+\gamma'_0\lambda_{u,0}\Sigma\delta_s d'_s+\gamma''_0 u_0\sum_1^n\delta_s\mathrm{D}'_s+\gamma_0''' v_0\Sigma\delta_s\mathrm{D}_s\,,$$

avendo ora indicato coll'indice s i valori corrispondenti all'intervallo δ_s, con $\lambda_{u,0}$, $\lambda_{v,0}$, u_0, v_0 i limiti superiori dei valori assoluti di λ_u, λ_v, u e v, e con γ_0, γ'_0, γ''_0, γ'''_0 nuovi numeri compresi fra —1 e 1 (questi limiti inclusi); e ora, osservando che per le ipotesi fatte le somme $\sum_1^n \delta_s d_s$, $\sum \delta_s d'_s$, $\sum_1^n \delta_s D_s$, $\sum_1^n \delta_s D'_s$ all'impiccolire indefinito degli intervalli δ_1, δ_2, ..., δ_n, hanno tutte per limite zero, si concluderà subito che il limite della somma $\sum_1^n (u\lambda_v + v\lambda_u)_s \delta_s$ è precisamente $[uv]_\alpha^\beta$; e questo dandoci $[uv]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (u\lambda_v + v\lambda_u) dx$, coll'osservare che anche $u\lambda_v$ e $v\lambda_u$ separatamente sono atte alla integrazione, ci conduce subito alle formole (43) e (44) le quali restano così dimostrate nella ipotesi di λ_u e λ_v sempre finite e atte alla integrazione fra α e β.

Dimostrate ora queste formole nel caso che λ_u, e λ_v siano sempre finite, si passa immediatamente al caso in cui uno o tutti e due questi estremi oscillatorii sono infiniti in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, pure essendo atti all'integrazione in qualunque intervallo nel quale sono finiti, e quindi anche nell'intiero intervallo (α, β) (§. 238).

Essendo infatti uv una funzione finita e continua di x in ogni punto fra α e β, e avendo ora dimostrato che per tutti quei valori di a e di x pei quali l'intervallo (a, x) non comprende punti d'infinito nè di λ_u, nè di λ_v si ha:

$$(45) \qquad [uv]_a^x = \int_a^x (u\lambda_v + v\lambda_u) dx,$$

basta applicare il teorema del §. 233 per concluderne intanto che la funzione $u\lambda_v + v\lambda_u$ è atta alla integrazione in tutto l'intervallo (α, β), e che questa formola (45) sussiste per tutti i sistemi di valori di a e di x che cadono nell'intervallo (α, β).

Ma per questo, e per la ipotesi che abbiamo fatta in principio che cioè sia stato verificato che anche negli intorni dei varii punti d'infinito di ciascuna delle funzioni λ_u e λ_v una almeno delle due

funzioni $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ è atta alla integrazione, s' intende subito che altrettanto accadrà anche dell' altra di queste due funzioni, e quindi la formola (45) potrà anche scriversi sotto la forma:

$$[uv]_a^x = \int_a^x u\lambda_v dx + \int_a^x v\lambda_u dx\ ,$$

dalla quale si hanno subito le (43) e (44); talchè queste formole generali d' integrazione per parti restano così pienamente dimostrate per tutti i casi in cui le funzioni u e v sono finite e continue, e quelle λ_u e λ_v degli estremi oscillatorii dei loro rapporti incrementali sono sempre finite, e atte alla integrazione fra α e β, o se divengono infinite lo divengono soltanto in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie e in modo che negli intervalli nei quali sono finite esse siano atte alla integrazione, e negli intorni dei punti d' infinito una almeno delle due funzioni $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ sia atta anch'essa all' integrazione.

In particolare dunque le formole d' integrazione per parti (43) o (44) sussistono quando gli estremi oscillatorii λ_u e λ_v delle funzioni u e v sono atti all' integrazione nell' intervallo che si considera, e sono sempre finiti, o almeno se divengono infiniti non lo divengono mai insieme, perchè allora siamo sicuri che negli intorni dei punti d' infinito di λ_u e λ_v uno almeno dei prodotti $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ è sempre finito; come anche le formole (43) e (44) sussistono nel caso in cui, pur divenendo infiniti in un punto uno o tutti e due gli estremi oscillatorii λ_u, e λ_v, p. es. λ_u, esso resta atto alla integrazione anche riducendolo ai suoi valori assoluti, o almeno negli intorni di quel punto la funzione λ_u stessa non ha altri punti d' infinito, e la funzione v non fà un numero infinito di oscillazioni, in modo da esser sicuri (§§. 226 e 227) che in questi intorni il prodotto $v\lambda_u$ è atto alla integrazione.

266. È poi da osservare che presa la formola d' integrazione per parti sotto la forma (44) può dirsi che essa sussista quando U e V sono funzioni atte alla integrazione fra α e β e non divengono infinite insieme, o almeno si trova che anche negli intorni dei loro punti d' infinito uno dei prodotti uV, vU di una di esse per l' integrale dell' altra è atto all' integrazione; come si può

notare altresì che le formole d'integrazione per parti possono porsi sotto la forma:

$$(46) \qquad \int_\alpha^\beta u\mathrm{V}dx = \left[u\int_b^x \mathrm{V}dx\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \lambda_u \left(\int_b^x \mathrm{V}dx\right)dx,$$

o anche sotto l'altra:

$$(47) \quad \int_\alpha^\beta \mathrm{V}\left(\int_a^x \mathrm{U}dx\right)dx = \left[\left(\int_a^x \mathrm{U}dx\right)\left(\int_b^x \mathrm{V}dx\right)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \mathrm{U}\left(\int_b^x \mathrm{V}dx\right)dx,$$

nelle quali a e b sono due valori qualunque fra α e β, e U e V sono funzioni atte alla integrazione pure fra α e β, e negli intorni dei loro punti d'infinito uno almeno dei prodotti $\mathrm{U}\int_b^x \mathrm{V}dx$, $\mathrm{V}\int_a^x \mathrm{U}dx$ è atto esso pure all'integrazione.

267. Osserviamo inoltre che la formola d'integrazione per parti (43) è applicabile quando le funzioni u e v che vi compariscono sono finite e continue, e al tempo stesso gli estremi oscillatorii λ_u, λ_v, oltre essere atti alla integrazione negli intervalli nei quali sono finiti, sono tali altresì che la presenza dei punti d'infinito fra α e β di queste quantità non fà sì che la formola stessa divenga priva di significato; giacchè se i suoi termini o anche due soltanto fra essi hanno un significato saranno soddisfatte tutte le condizioni che si richiedono perchè essa sussista rigorosamente. Se poi uno almeno dei due integrali che vi compariscono sarà infinito o indeterminato, allora altrettanto accadrà dell'altro integrale, o u e v non saranno più tutte e due finite e continue; e viceversa, se si presenta quest'ultima circostanza rispetto a u e v, uno almeno dei due integrali che figurano nella formola stessa sarà infinito o indeterminato; talche in ogni caso l'applicazione della formola (43) d'integrazione per parti potrà anche servire a farci riconoscere se una funzione sia atta o nò alla integrazione in un dato intervallo.

E aggiungiamo che propriamente per la validità della formola (43) non è neppure necessario supporre che u e v siano

finite e continue in tutto l'intervallo (α, β), ma coi soliti metodi si vede che possono aversi delle singolarità in u e v in un numero finito o infinito di punti costituenti un gruppo di prima specie, purchè in questi punti resti ancora finito e continuo il prodotto uv delle stesse funzioni.

Osservazioni analoghe possono farsi rispetto alle formole (44), (46) e (47).

268. Passiamo ora a considerare il caso di un intervallo (α, ∞) di ampiezza infinita, supponendo allora che u e v siano finite e continue per $x=\infty$ nel senso stabilito al §. 256, o almeno per $x=\infty$ sia finito e continuo il loro prodotto uv; e supponendo inoltre che la formola (43) sia applicabile in qualunque intervallo di ampiezza finita ma grande quanto si vuole (α, β).

Allora, passando al limite per $\beta=\infty$ nella stessa formola (43), si vede subito che il metodo generale d'integrazione per parti sarà applicabile anche fra α e ∞, e si avrà:

$$(48)\qquad \int_\alpha^\infty u\lambda_v dx = \Big[uv\Big]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty v\lambda_u dx,$$

tutte le volte che una delle funzioni $u\lambda_v$, $v\lambda_u$ sia atta alla integrazione fra un numero arbitrariamente grande x' e l'infinito, o anche, più semplicemente, tutte le volte che i varii termini di questa formola presentino un significato determinato. E così in particolare può dirsi (§. 245) che il metodo sarà applicabile tutte le volte che una almeno delle quantità λ_u e λ_v da un certo valore di x' in poi fino all'infinito sia atta all'integrazione e resti sempre inferiore a un numero finito, e la funzione che la moltiplica v o u non faccia oscillazioni fra lo stesso numero e l'infinito; o tutte le volte che una almeno delle quantità λ_u e λ_v resti atta alla integrazione fra x' e ∞ anche riducendola ai suoi valori assoluti.

Lo stesso dicasi delle altre formole:

$$(49)\qquad \int_\alpha^\infty u\mathrm{V}dx = \Big[uv\Big]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty v\mathrm{U}dx,$$

$$(50)\quad \int_\alpha^\beta \mathrm{V}\left(\int_a^x \mathrm{U}dx\right)dx = \left[\left(\int_a^x \mathrm{U}dx\right)\left(\int_b^x \mathrm{V}dx\right)\right]_\alpha^\infty - \int_\alpha^\infty \mathrm{U}\left(\int_b^\infty \mathrm{V}dx\right)dx,$$

analoghe alle (44) e (47).

Quì pure si deve osservare che quando u e v sono finite e continue anche per $x=\infty$, o almeno è tale il loro prodotto, siccome la formola (48) proviene dalla (43) con un passaggio al limite, si può dire che quando la (43) sussiste per qualunque valore finito di β, se avverrà che uno almeno dei due integrali che compariscono nella (48) sia infinito o indeterminato, altrettanto dovrà accadere dall'altro.

E se la formola (43) sussisterà per qualunque valore finito di β, ma una delle funzioni u e v, o almeno il loro prodotto non sarà finito e continuo per $x=\infty$, allora uno almeno dei due integrali che compariscono nella (48) dovrà essere indeterminato, o infinito ec. . . .

Osservazioni simili possono farsi sulle formole (49) e (50), e così il metodo d'integrazione per parti può anche servire a giudicare se una funzione sia atta o nò all'integrazione fra α e ∞.

269. Troviamo inoltre opportuno l'osservare che, a causa della formola (43) che noi abbiamo dimostrata pel caso che λ_u e λ_v siano atti all'integrazione in tutti gl'intervalli da α e β, e pei teoremi del §. 238, noi possiamo anche concludere che se u e v sono due funzioni finite e continue in tutto un intervallo finito (α, β) nel quale si trova che per ciascuna di esse uno degli estremi oscillatorii dei suoi rapporti incrementali λ_u, λ_v è atto alla integrazione, allora nello stesso intervallo gli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali del prodotto uv non potranno differire dalla somma $u\lambda_v+v\lambda_u$ altro che per una funzione d'integrale nullo.

Questi risultati collegano sempre più la teoria degli estremi oscillatorii delle funzioni con quella delle derivate.

270. Passiamo ora a occuparci del metodo d'integrazione per sostituzione, incominciando dal trasformare con questo metodo l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ nell'ipotesi dapprima che l'intervallo (α, β) sia finito, e che in esso la funzione $f(x)$ sia atta alla integrazione.

Indichiamo perciò con $\psi(y)$ una funzione di y data in un intervallo in cui si trovano due punti a e b nei quali essa ha i valori α e β respettivamente. Essendo $\psi(y)$ una delle solite funzioni che quì consideriamo, che hanno un valore *unico* e determinato

in ogni punto dell'intervallo (a, b) nel quale sono date, è certo che i punti a e b saranno differenti; e noi, supponendo dapprima che siano ambedue a distanza finita, li riguarderemo come estremi di un intervallo (a, b) nel quale $\psi(y)$ è conosciuta, e in questo intervallo supporremo che $\psi(y)$ sia continua e che col passare di y da a a b essa passi da α a β mantenendosi sempre crescente o sempre decrescente secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$.

Allora $\psi(y)$ col passare di y da a a b prenderà tutti i valori da α a β e li prenderà una volta sola, per modo che ogni valore di x fra α e β potrà considerarsi come corrispondente a un valore determinato di y fra a e b, e viceversa; o in altri termini ogni valore x nell'intervallo (α, β) potrà riguardarsi come determinato dal valore corrispondente y nell'intervallo (a, b) e viceversa, per modo che x potrà riguardarsi come una funzione di y nell'intervallo (a, b) definita dalla formola $x=\psi(y)$, e viceversa y potrà riguardarsi come una funzione di x nell'intervallo (α, β) definita da una formola $y=\varphi(x)$, ove $\varphi(x)$ è una funzione di x (*funzione inversa di* $\psi(x)$) tale che se per un valore a_1 di y fra a e b si ha $\psi(y)=\alpha_1$ il valore di $\varphi(x)$ per $x=\alpha_1$ è precisamente a_1.

La funzione $f(x)$ inoltre potrà anche riguardarsi come una certa funzione $F(y)$ di y nell'intervallo (a, b) che potremo indicare con $f[\psi(y)]$; e quando tutte le funzioni di cui parliamo siano funzioni analitiche, questa funzione $F(y)$ si otterrà effettivamente, come funzione analitica di y, ponendo in $f(x)$ per x il suo valore $\psi(y)$.

Ciò premesso, sarà facile dimostrare che se λ_ψ è uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di $\psi(y)$ per y compreso fra a e b, ed è atto all'integrazione in questo intervallo, la funzione $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ sarà atta essa pure all'integrazione nel medesimo intervallo, e si avrà la formola:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_a^b f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy\,, \tag{51}$$

che, se $\lambda_\psi=\psi'(y)$, si riduce alla formola ordinaria del metodo d'integrazione per sostituzione.

Supponiamo infatti dapprima che $f(x)$ sia sempre finita fra

α e β, e λ_ψ sia essa pure sempre finita fra α e β; e immaginiamo scomposto l'intervallo (a, b) in intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ piccoli a piacer nostro, supponendo anche, per fissare le idee, che sia $a<b$.

A questi intervalli $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ relativi ad y ne corrisponderanno altri $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ relativi ad x nei quali verrà a scomporsi l'intervallo (α, β), e i cui estremi si determineranno per mezzo della formola $x=\psi(y)$; e siccome $\psi(y)$ è continua fra α e β, pel teorema di Cantor (§. 42) si potranno prendere gli intervalli $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ talmente piccoli che gli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ siano tutti inferiori a quel numero che più ci piace σ.

Inoltre per le nostre ipotesi si avrà (§. 198 nota) $\delta_s=\lambda_s\delta'_s$, essendo λ_s un numero determinato compreso fra il limite inferiore e il limite superiore di λ_ψ nell'intervallo δ'_s; quindi, se $f(x_s)$ è il valore di $f(x)$ corrispondente al punto x_s nell'intervallo δ_s, e y_s è il valore di y che corrisponde a x_s nell'intervallo δ'_s, avremo:

$$\sum_1^n \delta_s f(x_s) = \sum_1^n f[\psi(y_s)]\lambda_s\delta'_s = \sum_1^n f[\psi(y_s)]\lambda_{y_s}\delta'_s + \sum_1^n f[\psi(y_s)]\,(\lambda_{y_s}-\lambda_s)\delta'_s,$$

ove λ_{y_s} è il valore di λ_ψ nel punto y_s; e poichè $f(x)$ è atta alla integrazione fra α e β, e col crescere indefinito di n la somma $\sum_1^n f[\psi(y_s)](\lambda_{y_s}-\lambda_s)\delta'_s$ ha per limite zero perchè λ_ψ è pure atta alla integrazione fra a e b, e si ha in valore assoluto:

$$\sum_1^n f[\psi(y_s)]\,(\lambda_{y_s}-\lambda_s)\delta'_s \leq \mathrm{L}\sum_1^n (\lambda_{y_s}-\lambda_s)\delta'_s,$$

ove L è il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e β, si vede subito che passando al limite si otterrà;

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim\sum_1^n f[\psi(y_s)]\lambda_{y_s}\delta'_s,$$

e quindi evidentemente per dimostrare la formola (51) basterà mostrare che la funzione $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ è atta alla integrazione fra a e b.

Ciò risulterebbe subito dal teorema sulla integrabilità dei prodotti, quando la integrabilità di $f[\psi(y)]$ fra a e b potesse dirsi conseguenza immediata di quella di $f(x)$ fra α e β, ma poichè ciò

non si vede chiaramente a meno che non si pongano altre condizioni limitative per $f(x)$ o per $\psi(y)$, occorrerà procedere altrimenti.

Osserviamo perciò che, sussistendo evidentemente la particolarità ora indicata nel caso speciale in cui $f(x)$ sia costante fra α e β, potremo supporre che $f(x)$ sia sempre positiva; poichè, ove nol fosse, basterebbe considerare invece di $f(x)$ la funzione $f(x)+c$ ove c è una costante scelta in modo che $f(x)+c$ sia sempre positiva fra α e β.

Ma anche λ_ψ nei punti y ove è differente da zero fra α e β sarà sempre positiva o sempre negativa perchè $\psi(y)$ è sempre crescente o sempre decrescente quando y varia da α a β; quindi, supponendo p. es. che λ_ψ ove è diversa da zero sia sempre positiva, e indicando con λ'_s e Λ'_s i limiti inferiori e superiori di λ_ψ nell'intervallo δ'_s, con l_s e L_s quelli di $f(x)$ nell'intervallo δ_s, e con D'_s l'oscillazione di $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ nell'intervallo δ_s', avremo evidentemente:

$$D'_s \leq L_s\Lambda'_s - l_s\lambda'_s\,,$$

ovvero:

$$D'_s \leq L_s(\Lambda'_s-\lambda'_s) + \lambda'_s(L_s-l_s)\,,$$

e quindi, osservando che $\lambda'_s\delta'_s \leq \delta_s$, si potrà scrivere anche:

$$D'_s\delta'_s \leq L(\Lambda'_s-\lambda'_s)\delta'_s + (L_s-l_s)\delta_s\,,$$

essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e β; e questa evidentemente per le ipotesi che abbiamo fatto sulla integrabilità di λ_ψ e di $f(x)$ nei respettivi intervalli (a, b) e (α, β) ci permette di dire che $\lim\sum_1^n D'_s\delta'_s = 0$, e che in conseguenza la funzione $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ è atta alla integrazione fra a e b e si ha la formola (51).

Dimostrata la formola (51) pel caso che $f(x)$ sia sempre finita fra a e b, si passa subito al caso in cui $f(x)$ pure restando atta alla integrazione fra α e β diviene infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie fra α e β, e λ_ψ diviene anch'essa infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie fra a e b, essendo sempre atta alla integrazione in ogni intervallo in cui è finita (e quindi anche (§. 238) nell'intiero intervallo da a, a b).

Si osservi infatti che, per le ipotesi che noi facciamo, l'integrale $\int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ ove x è compreso fra α e β (α e β incl.) sarà una funzione finita e continua $F_1(x)$ di x in questo intervallo, e per essere $x=\psi(y)$ potrà anche considerarsi come una funzione $F_1[\psi(y)]$ di y pure finita e continua nell'intervallo (a, b); e per quanto abbiamo dimostrato questa funzione $F_1[\psi(y)]$ godrà della proprietà di servire alla determinazione degli integrali $\int_{c}^{d} f[\psi(y)]\lambda_\psi dx$ in tutti gli intervalli (c, d) nei quali $f[\psi(y)]$ e λ_ψ sono finiti, per modo che si abbia:

$$F_1[\psi(d)]-F_1[\psi(c)]=\int_{c}^{d} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy.$$

Questo pel teorema del §. 233 basta per poter dire che $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ sarà atta all'integrazione anche nell'intiero intervallo (a, b), e che la stessa formola si avrà anche negli intervalli (c, d) nei quali cadono punti d'infinito di $f[\psi(y)]$ o di λ_ψ; quindi sarà sempre:

$$\int_{\psi(c)}^{\psi(d)} f(x)dx=\int_{c}^{d} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy,$$

per tutti i punti c e d dell'intervallo (a, b), e questo evidentemente completa la dimostrazione della formola (51) sotto le ipotesi che noi abbiamo fatto in principio.

271. Finora abbiamo ammesso che $\psi(y)$ col passare di y da a a b fosse sempre crescente o sempre decrescente secondochè $\alpha<\beta$ o $\alpha>\beta$. Ora ammettiamo invece che questo non accada, supponendo dapprima che $\psi(y)$ abbia fra a e b un numero finito di massimi e minimi nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_m$ e non abbia tratti d'invariabilità.

Allora se si ha p. es. $\alpha<\beta$, e il massimo dei valori che prende $\psi(y)$ fra a e b è β e il minimo è α, questa funzione $\psi(y)$ avrà ancora tutti i suoi valori compresi fra α e β, e in particolare saranno compresi fra α e β o saranno uguali a questi numeri i

valori $\psi(a_1)$, $\psi(a_2)$, ... $\psi(a_m)$ corrispondenti ai massimi e ai minimi di $\psi(y)$, ma mentre ad ogni valore di y fra a e b corrisponderà ancora un solo valore di x fra α e β, non sarà più vera l'inversa, cioè che ad ogni valore di x fra α e β corrisponda un solo valore di y, per modo che la funzione inversa che nel paragrafo precedente rappresentammo con $\varphi(x)$ non sarà più a un sol valore a meno che non si spezzi l'intervallo totale (a, b) negli intervalli parziali (a, a_1), (a_1, a_2) ... pei quali siano verificate le condizioni del paragrafo precedente. Però considerando ancora x come una funzione di y definita dalla formola $x=\psi(y)$, e in conseguenza $f(x)$ come una funzione $f[\psi(y)]$ di y fra a e b, e ammettendo che uno degli estremi oscillatorii λ_ψ di $\psi(y)$ fra a e b sia atto alla integrazione, basta osservare che nell'intervallo da a a a_1 la funzione $\psi(y)$ và sempre crescendo, da a_1 a a_2 và sempre decrescendo ec... per dedurne che avremo ancora le formole:

$$\int_\alpha^{\psi(a_1)} f(x)dx = \int_a^{a_1} f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy\,,$$

$$\int_{\psi(a_1)}^{\psi(a_2)} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy\,,$$

. . . .

e ora sommando membro a membro queste eguaglianze, coll'osservare che in ogni punto x la funzione $f(x)$ ha un valore unico e determinato, si trova di nuovo la formola (51).

Se poi il massimo M o il minimo m dei valori $\psi(y)$ fra a e b o tutti e due questi numeri sono ancora finiti ma non sono compresi fra α e β, allora, col variare di y da a a b, $\psi(y)$ prenderà valori anche fuori dell'intervallo (α, β), e converrà considerare x da m a M invece che da α a β, supponendo che $f(x)$ sia data e sia atta alla integrazione in tutto questo intervallo (m, M), o almeno immaginandola continuata anche fuori dell'intervallo (α, β) fino a m o a M con una funzione che sia sempre a un sol valore e sia atta alla integrazione; dopo di che le formole precedenti continueranno ad avere un significato e a sussistere rigorosamente, e quindi condurranno ancora alla formola (51).

Questa formola poi sussisterà evidentemente anche se la funzione $\psi(y)$ ha un numero finito di tratti d'invariabilità fra a e b; poichè se (a_1, a_2) è uno di questi tratti, allora pei valori di y compresi in esso si avrà $\lambda_\psi=0$, e oltre a questo sarà $\psi(a_1)=\psi(a_2)$, e quindi la seconda delle formole precedenti continuerà ancora a sussistere, come sussisteranno sempre quelle corrispondenti agli altri tratti d'invariabilità che si avessero in $\psi(y)$, o ai tratti rimanenti i cui estremi sono in punti di massimi e di minimi di $\psi(y)$ o in punti limiti d'invariabilità, e in conseguenza si avrà ancora la formola (51).

Coi soliti processi poi si estende la formola (51) al caso in cui $\psi(y)$ abbia fra a e b un numero infinito di massimi e minimi o di tratti d'invariabilità, purchè questi massimi e minimi e i punti estremi dei tratti d'invariabilità costituiscano un gruppo di punti di prima specie.

272. Passiamo ora a considerare il caso in cui uno almeno dei limiti di uno o tutti e due gli intervalli (α, β) e (a, b) della formola (51) è infinito; e per questo incominciamo dal supporre che b soltanto sia p. es. $+\infty$, per la ragione che la funzione $\psi(y)$, che ora supporremo data in un intervallo infinito, non diviene uguale a β altro che per $y=\infty$; e ammettiamo che $\psi(y)$ debba riguardarsi come continua anche per $y=\infty$, per modo cioè che sia $\lim_{y=\infty}\psi(y)=\beta$.

Allora, ammettendo che siano soddisfatte le condizioni per le quali la formola (51) sussiste per ogni intervallo rispetto ad x che vada da α a un numero $\beta-\varepsilon$ vicino quanto si vuole a β, o per un intervallo rispetto ad y che vada da a a un numero arbitrabitrariamente grande, e ricordando il teorema del §. 233, o più semplicemente passando al limite per $y=\infty$ nella formola:

$$\int_\alpha^{\psi(y)} f(x)dx = \int_a^y f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy,$$

che per le nostre ipotesi sussiste rigorosamente per ogni valore finito di y, si troverà ancora la formola (51).

Similmente si trova che questa formola sussisterà anche quando sia $a=-\infty$, $b=+\infty$, purchè allora pei valori reali

di y la funzione $\psi(y)$ prenda almeno una volta tutti i valori fra α e β, ma in modo però che $\psi(y)$ in ogni intervallo finito preso fra a e b abbia i massimi e minimi e gli estremi dei tratti d'invariabilità in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie.

273. Supponiamo infine che una almeno delle due quantità α e β sia infinitamente grande e sia p. es. $\beta=\infty$, restando però $f(x)$ atta alla integrazione fra α e ∞. Allora, se b sarà finito e $\psi(y)$ dovrà riguardarsi come continua anche per $y=b$, per modo cioè che sia $\lim_{y=b}\psi(y)=\infty$, supponendo p. es. $a<b$, e indicando con ε_1 un numero positivo arbitrariamente piccolo, si avrà:

$$\int_{\alpha}^{\psi(b-\varepsilon_1)} f(x)dx = \int_{a}^{b-\varepsilon_1} f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy\,,$$

e al limite sarà:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1=0}\int_{a}^{b-\varepsilon_1} f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy = \int_{a}^{b} f[\psi(y)]\lambda_\psi\, dy\,,$$

talchè la formola (51) continuerà ancora a sussistere.

Similmente, se insieme a $\beta=\infty$ si avrà $b=\infty$ e $\psi(y)$ sarà continua anche per $y=\infty$, allora per ogni valore comunque grande di b_1 si avrà:

$$\int_{a}^{\psi(b_1)} f(x)dx = \int_{a}^{b_1} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy\,,$$

e al limite sarà ancora:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b_1=\infty}\int_{\alpha}^{b_1} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy = \int_{a}^{\infty} f[(y)]\lambda_\psi dy\,;$$

talchè osservando che uguali risultati si hanno nel caso in cui anche α o a o tutti e due questi limiti siano uguali a $-\infty$, si può ora affermare che: " quando la funzione $f(x)$ in un intervallo " finito o infinito (α, β) è atta alla integrazione, l'integrale " $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, mediante la formola $x=\psi(y)$ può sempre trasformarsi

" nell'altro $\int_a^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy$, ove λ_ψ è uno degli estremi oscillatorii
" dei rapporti incrementali di $\psi(y)$, tutte le volte che questa fun-
" zione trasformatrice $\psi(y)$ in due punti a e b dell'intervallo finito
" o infinito in cui è data prende i valori α e β, e nell'intervallo
" (a, b) è sempre finita e continua, e ammette un estremo oscilla-
" torio λ_ψ atto alla integrazione, e nel medesimo intervallo (a, b),
" o in ogni sua porzione finita, se è infinito, la stessa funzione
" $\psi(y)$ ha i massimi e minimi e gli estremi dei suoi tratti d'inva-
" riabilità in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima
" specie.

Si ammette quì che $f(x)$, pure essendo sempre atta alla integrazione nell'intervallo (α, β), possa anche divenire infinita in un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, e lo stesso si ammette per λ_ψ nell'intervallo (a, b); e si potrebbe inoltre supporre che anche $\psi(y)$ divenisse infinita in alcuni punti γ compresi fra a e b, intendendo però allora che $f(x)$ fosse data o fosse continuata con una funzione atta alla integrazione anche fuori dell'intervallo (α, β).

274. Aggiungiamo che invece della condizione che $f(x)$ sia atta alla integrazione fra α e β si può anche porre l'altra che la funzione trasformata $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ sia atta alla integrazione nel nuovo intervallo (a, b).

Limitandoci infatti a considerare il caso in cui gli intervalli (α, β) e (a, b), come le funzioni $f(x)$ e λ_ψ, sono sempre finiti, perchè coi soliti passaggi ai limiti si estendono poi gli stessi risultati anche agli altri casi, si può osservare che scomponendo l'intervallo (a, b) negli intervalli parziali $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$, e indicando con $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ quelli corrispondenti dell'intervallo (α, β), e con l_s e L_s i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo δ_s come già si fece nel §. 270, si trova subito che:

$$\sum_1^n (L_s - l_s)\delta_s = \sum_1^n (L_s - l_s)\lambda_s\delta'_s = \sum_1^n L_s\lambda_s\delta'_s - \sum_1^n l_s\lambda_s\delta'_s =$$

$$= \sum_1^n L_s\lambda_{y'_s}\delta'_s - \sum_1^n l_s\lambda_{y'_s}\delta'_s + \sum_1^n L_s(\lambda_s - \lambda_{y_s})\delta'_s + \sum_1^n l_s(\lambda_{y'_s} - \lambda_s)\delta'_s,$$

ove λ_s è un numero determinato compreso fra i limiti inferiore e superiore di λ_ψ nell'intervallo δ'_s, e λ_{y_s} e $\lambda_{y'_s}$ sono valori che *effettivamente* prende λ_ψ in due punti qualsiansi y_s, y'_s di questo intervallo δ'_s.

Ora se $a<b$, e L è il limite superiore dei valori assoluti di $f(x)$ fra α e β, e λ'_s e Λ'_s sono i limiti inferiori e superiori di λ_ψ nell'intervallo δ'_s, le somme $\sum_1^n L_s(\lambda_s - \lambda_{y_s})\delta'_s$, $\sum_1^n l_s(\lambda_{y_s} - \lambda_s)\delta'_s$ sono numericamente inferiori all'altra $L\sum_1^n(\Lambda'_s - \lambda'_s)\delta'_s$; quindi, poichè λ_ψ è atto alla integrazione fra a e b, quando le $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ siano prese abbastanza piccole le somme $\sum_1^n L_s(\lambda_s - \lambda_{y_s})\delta'_s$, $\sum_1^n l_s(\lambda_{y'_s} - \lambda_s)\delta'_s$ saranno arbitrariamente piccole.

Considerando poi una delle somme $\sum_1^n L_s\lambda_{y_s}\delta'_s$, $\sum_1^n l_s\lambda_{y'_s}\delta_s'$, p. es. la prima di esse, osserveremo che siccome L_s è il limite superiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo δ_s, esisterà un punto ξ_s in quest'intervallo nel quale la funzione $f(x)$ prende effettivamente il valore L_s o prende un valore $f(\xi_s)$ vicino a L_s più di un numero arbitrariamente piccolo σ; e se per y_s si suppone preso il valore di y corrspondente allo stesso punto ξ_s, λ_{y_s} sarà il valore di λ_ψ nel punto stesso y_s, e così avremo:

$$\sum_1^n L_s\lambda_{y_s}\delta'_s = \sum_1^n f[\psi(y_s)]\lambda_{y_s}\delta'_s + \omega\,,$$

essendo ω una quantità numericamente inferiore a $\sigma\Lambda\Sigma_s\delta'_s$, o a $\sigma\Lambda(b-a)$, essendo Λ il limite superiore dei valori assoluti di λ_ψ fra a e b.

Similmente si avrà:

$$\sum_1^n l_s\lambda_{y'_s}\delta'_s = \sum_1^n f[\psi(y'_s)]\lambda_{y'_s}\delta'_s + \omega_1\,,$$

ove ω_1 è una quantità inferiore anch'essa a $\sigma\Lambda(b-a)$; quindi evidentemente, poichè le somme $\sum_1^n f[\psi(y_s)]\lambda_{y_s}\delta'_s$, $\sum_1^n f[\psi(y'_s)]\lambda_{y'_s}\delta'_s$

hanno ambedue per limite l'integrale $\int_a^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy$, perchè secondo le ipotesi fatte la funzione $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ è atta alla integrazione fra a e b, si conclude che $\lim\sum_1^n (L_s - l_s)\delta_s = 0$, e questo mostra appunto quanto abbiamo enunciato sopra.

È da notare che quando la funzione $\psi(y)$ soddisfi alle condizioni poste nel paragrafo precedente, i risultati quì ottenuti permettono di dire che la integrabilità di $f(x)$ fra α e β porta quella di $f[\psi(y)]\lambda_\psi$ fra a e b e viceversa; e quindi il metodo d'integrazione per sostituzione può anch'esso servire a giudicare se una funzione sia atta o nò alla integrazione in un dato intervallo finito o infinito.

274. Aggiungerò ora che quando la funzione trasformatrice non fosse data o non volesse considerarsi nell'intervallo (α, β), o in questo intervallo non soddisfacesse alle condizioni poste sopra, ma, supposti p. es. α e β ambedue finiti e $\alpha<\beta$, la stessa $\psi(y)$ fosse conosciuta in alcuni intervalli fuori dell'intervallo (α, β), e pei valori a' e b' di y, essendo $a'<a$ e $b'>b$ prendesse uno stesso valore γ compreso fra α e β, e nei due intervalli (α, γ), (a, a'), come nei due (γ, β), (b', b) fossero soddisfatte tutte le condizioni che si sono poste sopra per $f(x)$ e $\psi(y)$ negli intervalli (α, β), (a, b), allora evidentemente sarebbe:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_a^{a'} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy\,, \quad \int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_{b'}^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy\,,$$

e quindi per trasformare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ invece della formola (51) si potrebbe fare uso dell'altra:

$$(52)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^{a'} f[\psi(y)]\lambda_\psi dy + \int_{b'}^b f[\psi(y)]\lambda_\psi dy\,,$$

che per $a'=-\infty$ e $b'=\infty$ si può anche scrivere:

$$(53)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_{-\infty}^a f[\psi(y)]\lambda_\psi dy - \int_b^\infty f[\psi(y)]\lambda_\psi dy\,.$$

E così in particolare, supponendo $\psi(y)=\frac{1}{y}$, quando α e β sono di segno contrario e α p. es. è negativo, si trova di quì che per trasformare l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ si potrà fare uso della formola:

$$(54)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{-\infty}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}+\int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2},$$

giacchè ora si ha $\lambda_y=-\frac{1}{y^2}$.

276. Farò infine osservare che quando invece di esser data la funzione $\psi(y)$ sia data la funzione $\varphi(x)$ che stabilisce la relazione $y=\varphi(x)$ che corrisponde a quella che prima avevamo $x=\psi(y)$, allora sotto condizioni simili a quelle dei casi precedenti si ha una formola di trasformazione analoga alla (51).

Supposto infatti che $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$ siano differenti fra loro, e che col passare di x da α e β $\varphi(x)$ resti sempre continua e sempre crescente o sempre decrescente secondochè $\varphi(\alpha)<\varphi(\beta)$ o $\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)$, si vede subito che insieme alla relazione $y=\varphi(x)$ si avrà la relazione inversa $x=\psi(y)$, essendo $\psi(y)$ una funzione che, per y compreso fra $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$, è finita continua e a *un sol valore,* e che col passare di y da $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$ passa sempre crescendo o sempre decrescendo da α a β; e per questa funzione $\psi(y)$ i rapporti incrementali, come i loro estremi oscillatorii, in ogni punto y fra $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$ saranno evidentemente gli inversi di quelli della funzione $\varphi(x)$ nel punto corrispondente x; e soltanto questi estremi oscillatorii saranno invertiti naturalmente fra loro, e potranno quelli che sono destri per $\varphi(y)$ corrispondere a quelli che sono sinistri per $\varphi(x)$, e viceversa.

Indicando dunque con λ_φ uno degli estremi oscillatorii dei rapporti incrementali di $\varphi(x)$, e con λ_ψ quello inverso di $\psi(y)$, se si saprà che l'inversa $\frac{1}{\lambda_\varphi}$ di λ_φ considerata come funzione di x è atta alla integrazione fra α e β, e se indicando con $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$ la

espressione $\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}$ considerata come funzione di y si saprà altresì che essa è atta all'integrazione fra $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$, o si saprà invece che tale è la funzione di x $\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\lambda_\varphi$ o $f(x)$ fra α e β, allora, pei risultati dei paragrafi precedenti, avremo la formola:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy=\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\lambda_\varphi dx\,,$$

ovvero:

$$(55)\qquad \int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy.$$

nella quale a λ_φ puo sostituirsi la derivata $\varphi'(x)$ tutte le volte che questa derivata esiste e che la sua inversa $\frac{1}{\varphi'(x)}$ è atta alla integrazione fra α e β.

276. Questa formola, nella quale, come abbiamo già detto, $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$ s'intende già ridotto funzione di y, è analoga alla (51). Però, onde essa sussista, si richiede che $\varphi(x)$ soddisfi alle condizioni dette sopra, e in particolare si richiede che col passare di x da α a β, $\varphi(x)$ vada sempre crescendo o sempre decrescendo.

S'intende subito infatti che se questo non fosse la relazione inversa $x=\psi(y)$ non potrebbe aversi per mezzo di una funzione $\psi(y)$ che fosse a un sol valore fra $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$; e se p. es. avvenisse che col passare di x da α e β la funzione $\varphi(x)$ andasse crescendo finchè x và da α a γ, e poi decrescesse col passare di x da γ a β, essendo γ un numero compreso fra α e β, si avrebbe ancora certamente:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy+\int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\beta)}\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y dy\,,$$

ma quantunque almeno una parte del secondo intervallo $[\varphi(\gamma), \varphi(\beta)]$ appartenga al primo $[\varphi(\alpha), \varphi(\gamma)]$, e nelle integrazioni queste parti comuni siano percorse in senso contrario, pure non può dirsi che i due integrali del secondo membro si riducano a un solo integrale esteso da $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$, perchè evidentemente la funzione $\left[\frac{f(x)}{\lambda_\varphi}\right]_y$ considerata come funzione di y, per il medesimo valore di y, almeno ordinariamente, non verrà ad avere lo stesso valore nei due integrali, per la ragione che anche per lo stesso valore di y i corrispondenti valori di x che in essa ordinariamente figurano non sono ordinariamente gli stessi.

E così quando sia p. es. $y=\varphi(x)=\operatorname{sen} x$, si avrà:

$$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]_y dy+\int_1^0 \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]_y dy,$$

ovvero:

$$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^1 \frac{f(\operatorname{arc\,sen} y)}{\sqrt{1-y^2}}dy+\int_0^1 \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,cos} y\right)}{\sqrt{1-y^2}}dy,$$

ove il radicale deve essere preso positivamente, e $\operatorname{arc\,sen} y$ e $\operatorname{arc\,cos} y$ indicano gli archi inferiori a $\frac{\pi}{2}$ che hanno per seno o per coseno y; e evidentemente in generale non si avrà $\int_0^\pi f(x)dx=0$.

277. Passiamo ora a parlare della integrazione per serie dando dei casi in cui il teorema sulla integrazione delle somme finite si estende al caso delle somme infinite, per modo cioè che l'integrale definito della somma di una serie data sia la somma della serie formata cogli integrali definiti dei termini della primitiva, o, come si dice, *sia applicabile l'integrazione per serie.*

Per questo incominciamo dall'esporre il seguente:

Teorema. *Se i termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ di una serie $\sum_1^\infty u_n$ sono funzioni di x finite e atte alla integrazione in un intervallo*

finito (α, β), *e in questo intervallo la serie stessa è convergente in ugual grado, la sua somma* $f(x)$ *oltre essere una funzione sempre finita di* x *nell'intervallo* (α, β) *sarà atta alla integrazione nello stesso intervallo, e la serie* $\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n dx$ *formata cogli integrali fra* α *e* β *dei termini della serie data* $\sum_1^\infty u_n$ *sarà convergente, e avrà per somma l'integrale definito fra* α *e* β *della somma* $f(x)$ *della serie stessa* $\sum_1^\infty u_n$ *(cioè sarà applicabile l'integrazione per serie), e si avrà:*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n dx. \tag{56}$$

Osserviamo infatti che, se n è un numero finito qualunque, si avrà:

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n, \tag{57}$$

essendo R_n il resto della serie $\sum_1^\infty u_n$; e siccome questa serie è convergente in ugual grado nell'intervallo (α, β), per ogni numero positivo e comunque piccolo σ, esisterà un numero finito m tale che pei valori di n non inferiori ad m e per ogni valore di x compreso fra α e β (α e β incl.) si abbia in valore assoluto $R_n < \sigma$.

Così essendo, supponiamo che n sia un numero maggiore di questo numero m; e immaginando scomposto l'intervallo (α, β) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, indichiamo con $D_{1,s}$, $D_{2,s}$, $\ldots D_{n,s}$, $D_{f,s}$, $D_{R,s}$ le oscillazioni di $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $f(x)$ e R_n nell'intervallo δ_s. Si avrà:

$$D_{f,s} \leq D_{1,s} + D_{2,s} + \ldots + D_{n,s} + D_{R,s},$$

perchè evidentemente i valori di $f(x)$ nell'intervallo δ_s non supereranno la somma dei limiti superiori di $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e R_n nello stesso intervallo, e non saranno inferiori alla somma dei limiti inferiori di queste quantità; quindi osservando che, dietro quanto

abbiamo detto sopra, il $D_{R,s}$ in qualunque intervallo δ_s sarà inferiore a 2σ, si troverà subito che:

$$\sum_1^p \delta_s D_{f,s} \leq \sum_1^p \delta_s D_{1,s} + \sum_1^p \delta_s D_{2,s} + \ldots + \sum_1^p \delta_s D_{n,s} + 2\sigma(\beta-\alpha).$$

Ma, siccome $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sono atte alla integrazione fra α e β, dopo di avere fissato n e σ, potremo prendere le $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$ talmente piccole che le varie somme del secondo membro siano inferiori a quel numero che più ci piace come p. es. a $\frac{\sigma}{n}$, e allora si avrà:

$$\sum_1^p \delta_s D_{f,s} < \sigma + 2\sigma(\alpha-\beta);$$

quindi, poichè σ è arbitrariamente piccolo, si conclude intanto (§. 185) che la somma $f(x)$ della serie $\sum_1^\infty u_n$ sarà atta alla integrazione nell'intervallo (α, β).

Dimostrata ora l'integrabilità della funzione $f(x)$ fra α e β, e quindi anche quella di R_n, la formola (57) ci darà subito:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_1^n \int_\alpha^\beta u_n dx = \int_\alpha^\beta R_n dx;$$

e ora continuando a supporre che n sia superiore al numero m indicato sopra, per modo che in valore assoluto si abbia $R_n < \sigma$ per tutti i valori di x fra α e β, si vede di quì chiaramente che in valore assoluto sarà $\int_\alpha^\beta R_n dx < \sigma(\beta-\alpha)$, e quindi pure in valore assoluto si avrà per qualunque valore di n superiore ad m:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_1^n \int_\alpha^\beta u_n dx < \sigma(\beta-\alpha);$$

e questo mostra appunto che la serie $\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n dx$ è convergente e ha per somma l'integrale $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ della somma della serie data

$\sum_1^\infty u_n$; talchè il teorema enunciato sopra può dirsi completamente dimostrato.

È da osservare che, secondo la dimostrazione fatta, onde concludere che la somma della serie $\sum_1^\infty u_n$ è integrabile fra α e β basterebbe sapere soltanto che questa serie è convergente in ugual grado semplicemente (§. 91) fra α e β; ma finchè si resta nel caso generale, e finchè non si hanno altre condizioni, per dimostrare che la serie $\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n dx$ degli integrali è convergente e ha per somma l'integrale della somma della serie data Σu_n conviene ammettere la convergenza in egual grado in modo assoluto della serie data stessa Σu_n.

278. Si aggiunge che, sotto le ipotesi contenute nell'enunciato del teorema, si ha anche la formola:

$$\int_\alpha^x f(x)dx - \sum_1^n \int_\alpha^x u_n dx < \sigma(\beta-\alpha),$$

che vale per tutti i valori di x fra α e β; e siccome la differenza $\int_\alpha^x f(x)dx - \sum_1^n \int_\alpha^x u_n dx$ non è altro che il resto $\sum_{n+1}^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ della serie degli integrali presi fra α e x, si può anche asserire che *quando per la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *i termini* $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ *sono finiti e atti alla integrazione fra* α *e* β, *e la serie stessa nell'intervallo* (α, β) *è convergente in ugual grado, anche la serie* $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ *degli integrali presi fra* α *e* x *sarà convergente in ugual grado nello stesso intervallo* (α, β).

279. Oltre a ciò aggiungiamo che siccome le serie che vengono dal principio della condensazione delle singolarità sono convergenti in ugual grado in qualunque intervallo finito, e i loro termini

sono sempre finiti e atti alla integrazione, si ritrova come al §. 187. 3.° che le funzioni da esse rappresentate sono atte alla integrazione in qualunque intervallo finito, e il loro integrale è la somma della serie degli integrali dei singoli termini presi fra gli stessi limiti di quello della funzione somma; talchè si potranno avere anche in questo modo le espressioni analitiche di infinite funzioni che, sebbene sempre finite e continue, mancano di derivata in un numero infinito di punti di qualunque porzione finita dell'intervallo nel quale si considerano.

280. Secondo quanto abbiamo detto adunque, onde essere sicuri che a una serie è applicabile l'integrazione definita termine a termine, occorre sapere che la serie stessa converge in ugual grado fra i limiti della integrazione. Quando questo non sia, potrà darsi che speciali particolarità della serie data permettano ancora di applicarle l'integrazione definita fra dati limiti; però non si può lasciare di osservare che quando manchi la convergenza in ugual grado potrà effettivamente talvolta avvenire che la somma della serie sia ancora continua, e ciò non ostante la serie degli integrali dei suoi termini sia divergente o indeterminata, o essendo convergente, non rappresenti l'integrale della somma della serie data.

S'intende subito infatti che se si avrà p. es. una serie $\sum_1^\infty u_n$ i cui termini siano finiti e continui fra α e β, e se questi termini si potranno scomporre in modo da dar loro la forma $u_n = v_n - v_{n+1}$, ove le v_n sono (come le u_n) funzioni finite e continue fra α e β che si annullano per $x=\alpha$, e tendono a zero col crescere indefinito di n, ma non con uguale rapidità pei varii valori di x, allora *la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *non sarà convergente in ugual grado fra* α *e* β *per quanto la sua somma sia la funzione finita e continua* v_1, e il suo integrale fra α e x sarà $\int_\alpha^x v_1 dx$, mentre la serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ avrà per somma dei suoi primi n termini la differenza

$\int_\alpha^x v_1 dx - \int_\alpha^x v_{n+1} dx$; talchè se l'integrale $\int_\alpha^x v_{n+1} dx$, a causa della particolarità che abbiamo in v_n, non avrà per limite zero, la formola dell'integrazione per serie *non* sarà applicabile; e anzi la serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ dipendentemente dal valore dell'integrale $\int_\alpha^x v_{n+1} dx$ potrà anche essere indeterminata o divergente.

Ora una tal circostanza si presenta per infinite serie $\sum_1^\infty u_n$, perchè se p. es. le funzioni v_n che servono alla scomposizione di u_n sono date dalla formola $v_n = \frac{k_n \varphi'_n(x)}{1+\varphi^2_n(x)}$, ove k_n è una funzione di n che può anche crescere indefinitamente con n e $\varphi_n(x)$ è una funzione finita e continua insieme alla sua derivata $\varphi'_n(x)$ fra α e β che per x diverso da α cresce indefinitamente con n ma in modo che v_n tenda a zero con n, e per $x=\alpha$ φ_n e φ'_n sono uguali allo zero, si avrà:

$$\int_\alpha^x v_{n+1} dx = k_{n+1} \operatorname{arc\,tg} \varphi_{n+1}(x), \quad \text{e} \quad \int_\alpha^x v_1 dx = k_1 \operatorname{arc\,tg} \varphi_1(x),$$

ove con $\operatorname{arc\,tg} z$ in generale indichiamo il più piccolo arco la cui tangente è z; talchè a meno che $k_{n+1} \operatorname{arc\,tg} \varphi_{n+1}(x)$ non sia zero o non tenda a zero, la somma della serie formata cogli integrali dei termini della serie data $\sum_1^\infty \left[\frac{k_n \varphi'_n(x)}{1+\varphi_n^2 x} - \frac{k_{n+1}\varphi_{n+1}(x)}{1+\varphi_{n+1}^2 x}\right]$ non sarà l'integrale $k_1 \operatorname{arc\,tg} \varphi_1(x)$ della somma, e anzi la serie stessa degli integrali potrà anche essere indeterminata o divergente.

Così p. es., se h_n è una funzione positiva di n che cresce indefinitamente, e $\varphi_n = h_n(x-\alpha)^2$, per x diverso da α sarà $\lim \operatorname{arc\,tg} \varphi_n = \frac{\pi}{2}$, e la serie degli integrali sarà convergente, ma non rappresenterà l'integrale della somma della serie data tutte le volte che k_n avrà un limite determinato e finito diverso da zero; mentre se sarà

p. es. $k_n = \sqrt{h_n}$ la serie degli integrali sarà divergente, e se sarà p. es. $k_n = \operatorname{sen} h_n$, la serie stessa almeno per infinite forme della funzione h_n sarà indeterminata.

Similmente, se sarà: $v_n = \frac{k_n \varphi'_n(x)}{1+\varphi_n(x)}$ ove k_n può anche crescere indefinitamente con n, $\varphi_n(x)$ si annulla insieme alla sua derivata $\varphi'_n(x)$ per $x=\alpha$, e del resto queste funzioni sono sempre finite e continue e tali che v_n al crescere indefinito di n sia zero o abbia per limite zero, si verrà ad avere: $\int_\alpha^x v_{n+1} dx = k_{n+1} \log \{ 1+\varphi_{n+1}(x) \}$,

e a seconda del limite di $k_n \log \{ 1+\varphi_n(x) \}$ per $n=\infty$ la serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ differirà dall'integrale della somma della serie primitiva Σu_n, e potrà essere divergente o indeterminata, non ostante che la serie primitiva $\sum_1^\infty u_n$ fosse sempre convergente e la sua somma $\frac{k_1 \varphi'_1(x)}{1+\varphi_1(x)}$ fosse finita e continua per ogni valore di x fra α e β.

Così p. es. quando, al crescere indefinito di n, k_n tenda a zero e h_n sia ancora una funzione positiva di n che cresce indefinitamente, se si avrà $\varphi_n(x) = h_n(x-\alpha)^2$, sarà:

$$\sum_1^n \int_\alpha^x u_n dx - \int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n = -k_{n+1} \log \{ 1+h_{n+1}(x-\alpha)^2 \} =$$

$$= -k_{n+1} \log h_{n+1} - k_{n+1} \log \left\{ \frac{1}{h_{n+1}} + (x-\alpha)^2 \right\},$$

e l'ultimo termine col crescere indefinito di n avrà per limite zero; talchè se sarà p. es. $k_n = \frac{1}{\log h_n}$ la serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ sarà convergente ma non avrà per somma l'integrale $\int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n$ della somma della serie data; se sarà $k_n = \frac{\operatorname{sen} h_n}{\log h_n}$ la serie stessa

almeno per infinite forme della funzione h_n sarà indeterminata; e se sarà $k_n = \frac{1}{\sqrt{\log h_n}}$ la serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ sarà divergente.

281. Tornando ora al caso generale, dimostreremo che: *se la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *è convergente in tutti i punti di un intervallo finito* (α, β), *tranne tutt'al più nei punti di un gruppo finito o infinito* G *di prima specie nei quali tutti o alcuni dei suoi termini divengono infiniti o indeterminati, o nei quali la serie data è divergente o indeterminata; e se al tempo stesso questi termini* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, *quando ad essi siano attribuiti valori qualsiansi anche nei punti d'indeterminazione, sono atti all'integrazione fra* α *e* β, *e inoltre la serie degli integrali* $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ *è convergente e rappresenta una funzione finita e continua fra* α *e* β, *e alla serie* $\sum_1^\infty u_n$ *è applicabile l'integrazione per serie negli intervalli fra* α *e* β *nei quali è determinata e finita,* allora *la somma di questa serie* $\sum_1^\infty u_n$, *quando le siano attribuiti valori qualunque nei punti d'indeterminazione, verrà atta alla integrazione anche nell'intiero intervallo* (α, β) *e ad essa sarà applicabile l'integrazione per serie e si avrà:*

$$\int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx, \tag{58}$$

per ogni valore di x *fra* α *e* β *(*α *e* β *incl.).*

Con queste ipotesi infatti, se $F(x)$ è la funzione rappresentata dalla serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$, essa rispetto all'integrale $\int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n$ soddisfarà alle condizioni del teorema del §. 233 esteso (come evidentemente può farsi) anche al caso che la fun-

zione ivi indicata con $f(x)$ abbia fra α e β dei punti d'indeterminazione in un gruppo finito o infinito di prima specie; quindi la funzione $\sum_1^\infty u_n$ sarà atta alla integrazione nell'intiero intervallo (α, β) e la formola (58) sussisterà per ogni valore di x fra α e β (α e β incl.), come appunto abbiamo enunciato.

282. In particolare dunque ricordando i teoremi sulle serie convergenti in ugual grado formate da termini continui (§. 98), noi possiamo ora affermare che: *se la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *è convergente in ugual grado soltanto in generale fra* α *e* β, *o in quelli intervalli che si ottengono quando siano tolti con piccoli intorni un gruppo finito o infinito di punti di prima specie nei quali essa è divergente o indeterminata, ma invece la serie degli integrali* $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ *è convergente in ugual grado in tutto l'intervallo* (α, β), allora *alla serie data* $\sum_1^\infty u_n$ *sarà applicabile l'integrazione per serie in ogni intervallo fra* α *e* β.

283. Per quello poi che si riferisce alla integrazione per serie fra limiti infiniti, osserveremo che *se alla serie* $\sum_1^\infty u_n$ *è applicabile l'integrazione termine a termine in ogni intervallo comunque grande ma finito* (α, β), *lo stesso accadrà nell'intervallo infinito* (α, ∞), *e si avrà:*

$$\int_\alpha^\infty dx \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^\infty u_n dx,$$

tutte le volte che la serie integrale $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ *è convergente e rappresenta una funzione finita e continua anche per* $x = \infty$; giacchè allora, indicando con $F(x)$ questa funzione, pel teorema del §. 258 insieme alla formola:

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n,$$

che, secondo i nostri dati, sussiste per tutti i valori finiti di x, si avrà anche l'altra:

$$F(\infty)-F(\alpha)=\int_\alpha^\infty dx\sum_1^\infty u_n .$$

Non si esclude quì che in qualunque intervallo finito fra α e ∞ la serie data $\sum_1^\infty u_n$ possa anche avere dei punti di divergenza o d'indeterminazione, o dei punti d'infinito o d'indeterminazione di tutti o di alcuni dei suoi termini nei soliti gruppi finiti o infiniti di prima specie, ec....

284. Talvolta accade che data una serie $\sum_1^\infty u_n$ alla quale l'integrazione termine a termine è applicabile, si debba questa moltiplicare per una certa funzione U prima di eseguire l'integrazione. Allora nel caso degli intervalli finiti (α, β) se si saprà che la serie $\sum_1^\infty u_n$ è convergente in ugual grado fra α e β, e se U sarà finita, anche la serie $\sum_1^\infty Uu_n$ sarà convergente in ugual grado, e quindi basterà assicurarsi che la funzione U sia atta all'integrazione per poter dire che si ha:

$$\int_\alpha^x dx U\sum_1^\infty u_n=\sum_1^\infty\int_\alpha^x Uu_n dx ,$$

per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclus.).

Se poi la serie $\sum_1^\infty u_n$ non sarà convergente in ugual grado fra α e β, o almeno saremo incerti intorno all'esservi o nò questa convergenza, o se l'intervallo (α, β) sarà infinito, allora *quando si sappia soltanto che la serie data* $\sum_1^\infty u_n$ *è convergente per ogni valore di* x *nell'intervallo finito o infinito* (α, β), *e ad essa è applicabile l'integrazione termine a termine in questo intervallo, si potrà ancora assicurare che la formola:*

$$\int_\alpha^x dx \mathrm{U} \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U} u_n dx ,$$

sussiste per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.) tutte le volte che la serie integrale $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ della $\sum_1^\infty u_n$ è convergente in ugual grado fra α e β, e la funzione U *fra α e β è sempre finita e non fà oscillazioni o ne fà soltanto un numero finito.*

Osserviamo infatti che dietro l'ipotesi che alla serie data $\sum_1^\infty u_n$ sia applicabile l'integrazione termine a termine, si ha la formola:

$$\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx = \int_\alpha^x dx \sum_1^\infty u_n = \int_\alpha^x dx \sum_1^n u_n + \int_\alpha^x \mathrm{R}_n dx = \sum_1^n \int_\alpha^x u_n dx + \int_\alpha^x \mathrm{R}_n dx ,$$

ove R_n è il resto della serie $\sum_1^\infty u_n$ a partire dal termine $(n+1)^0$, e quindi l'integrale $\int_\alpha^x \mathrm{R}_n dx$ è il resto corrispondente della serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$; talchè dietro l'ipotesi che questa serie degli integrali $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ sia convergente in ugual grado nell'intervallo finito o infinito (α, β) che quì si considera, si può esser certi che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esisterà un numero m tale che per $n \geq m$ l'integrale $\int_\alpha^x \mathrm{R}_n dx$ sia sempre numericamente inferiore a σ per qualunque valore di x fra α e β (α e β incl.).

Si aggiunge che siccome la funzione U fra α e β non fà oscillazioni o ne fà soltanto un numero finito, essa e quindi anche i prodotti $\mathrm{U}u_1$, $\mathrm{U}u_2, \ldots$, $\mathrm{U}u_n, \ldots$ e gli altri $\mathrm{U}\sum_1^\infty u_n$, UR_n saranno

atti alla integrazione fra α e β, e si avrà:

$$\int_\alpha^x \mathrm{U}\sum_1^\infty u_n\,dx = \int_\alpha^x \sum_1^n \mathrm{U}u_n dx + \int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx = \sum_1^n \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx + \int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx,$$

e per un teorema noto (§§. 207 e 262) sarà in valore assoluto $\int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx < p\mathrm{U}_1\sigma$, essendo p un numero finito, e U_1 il limite superiore dei valori assoluti di U fra α e x o fra α e β; dunque evidentemente la serie $\sum_1^\infty \int_\alpha^x u_n dx$ sarà convergente e avrà per somma l'integrale $\int_\alpha^x \mathrm{U}\sum_1^\infty u_n dx$, come appunto abbiamo enunciato.

Aggiungiamo che *sotto le ipotesi contenute nell'enunciato del teorema la serie integrale* $\sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx$ *è convergente in ugual grado fra* α *e* β, giacchè per ogni valore di x in questo intervallo il suo resto $\int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx$ è numericamente inferiore a $p\mathrm{U}_1\sigma$; e oltre a ciò osserviamo che il teorema dimostrato continua a sussistere anche se U fà un numero infinito di oscillazioni fra α e β, purchè allora in questo intervallo (α, β) la funzione U venga a perdere tutte le oscillazioni aggiungendovi o togliendovi una funzione di primo grado.

285. Dimostriamo anche che *se i termini* $u_1, u_2, \ldots$ *della serie* $\sum_1^\infty u_n$ *sono finiti e atti alla integrazione fra* α *e* β, *e in questo intervallo* (α, β) *o in ogni sua porzione finita se esso è infinito, la funzione* U *è sempre finita o diviene infinita soltanto in punti costituenti un gruppo finito o infinito di prima specie,* allora *si avrà ancora la formola:*

$$\int_\alpha^x dx \mathrm{U}\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx,$$

per tutti i valori x fra α e β, e la serie integrale $\sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx$ *sarà convergente in ugual grado in questo intervallo, tutte le volte che anche la serie* $\sum_1^\infty u_n$ *sia convergente in ugual grado, e la funzione* U *resti atta alla integrazione anche ridotta ai suoi valori assoluti.*

Con queste ipotesi infatti tutti i termini $\mathrm{U}u_n$ e gli altri $\mathrm{U}\sum_1^\infty u_n$ UR_n saranno atti alla integrazione fra α e β, e nella formola:

$$\int_\alpha^x dx \mathrm{U} \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx + \int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx,$$

il termine $\int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx$ a partire da un certo valore di n in poi sarà numericamente inferiore a $\sigma \int_\alpha^x \mathrm{U}_1 dx$, ove σ è un numero arbitrariamente piccolo e U_1 è la funzione dei valori assoluti di U; e quindi la serie $\sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx$ sarà evidentemente convergente, e avrà per somma l'integrale $\int_\alpha^x dx \mathrm{U} \sum_1^\infty u_n$.

Inoltre anche in questo caso la serie integrale $\sum_1^\infty \int_\alpha^x \mathrm{U}u_n dx$ sarà convergente in ugual grado fra α e β, perchè il suo resto $\int_\alpha^x \mathrm{UR}_n dx$ a partire da un certo valore di n in poi sarà numericamente inferiore a $\sigma \int_\alpha^x \mathrm{U}_1 dx$ e quindi anche a $\sigma \int_\alpha^\beta \mathrm{U}_1 dx$ qualunque sia x, e con ciò il teorema è completamente dimostrato.

286. Occupiamoci infine anche dei limiti degli integrali definiti $\int_\alpha^\beta f(x) dx$.

Consideriamo perciò il caso in cui la funzione $f(x)$, che indi-

cheremo ora con $f_\lambda(x)$, dipende da un parametro λ che può prendere tutti i valori fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$ (λ_0 al più escluso), o anche può prendere in questo intervallo soltanto un gruppo *infinito* di valori di cui λ_0 sia un punto limite, essendo λ_0 un numero che possiamo sempre supporre finito, e ε un numero positivo o negativo, p. es. positivo, sufficientemente piccolo.

Supponiamo che per ciascuno dei valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$ che quì si possono considerare, la funzione $f_\lambda(x)$ sia una funzione di x atta alla integrazione fra α e β, essendo α e β due numeri costanti, o che dipendono anch'essi da λ, per modo però che per $\lambda=\lambda_0$ a destra abbiano limiti determinati finiti o infiniti α_0 e β_0; e proponiamoci di trovare il limite di $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ per $\lambda=\lambda_0$ a destra.

Ammettiamo perciò dapprima che α e β siano finiti, e che per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.), ad eccezione tutt'al più dei valori $i_1, i_2, i_3, \dots$ corrispondenti a un gruppo finito o infinito di punti di prima specie, la funzione stessa $f_\lambda(x)$ sia sempre finita; e per $\lambda=\lambda_0$ a destra questa funzione abbia un limite determinato $\psi(x)$ sempre finito e che tutt'al più vada crescendo indefinitamente all'indefinito avvicinarsi di x a tutti o a alcuni dei punti $i_1, i_2, i_3, \dots$; e in questi punti $i_1, i_2, \dots$ $f_\lambda(x)$ sia finita o infinita o anche indeterminata e abbia per limite l'infinito o non abbia verun limite, per modo però che attribuendo anche in questi punti a $\psi(x)$ un valore determinato qualunque, questo limite venga ad essere una funzione $\psi(x)$ di x fra α_0 e β_0 atta alla integrazione.

Ammettiamo poi che escludendo successivamente con intervalli sufficientemente piccoli i punti $i_1, i_2, i_3, \dots$ col processo del §. 14, e escludendo anche i punti α_0 e β_0, per ciascuno degli intervalli esclusi η_s, o almeno per le porzioni di questi intervalli che a seconda del valore di λ (*) compariscono nell'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$,

(*) È chiaro che se $(\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta)$ è l'intervallo che esclude il punto α_0, e ε'_0 è sufficientemonte piccolo, il numero α finirà per trovarsi sempre in questo inter-

gli integrali $\int_{\eta_s} f_\lambda(x)dx$, $\int_{\eta_s} \psi(x)dx$ estesi a queste porzioni, per tutti i valori di λ compresi fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon'_0$, quando ε'_0 è sufficientemente piccolo, si possano tutti supporre inferiori a quel numero che più ci piace σ_0, e ciò almeno quando i successivi intervalli η_s che si prenderanno siano scelti convenientemente; e ammettiamo infine che, dopo di avere fatto tutte le indicate esclusioni, la funzione $f_\lambda(x)$ in tutti i punti x degli intervalli restanti ξ_s *converga in ugual grado* verso il limite corrispondente $\psi(x)$, per modo cioè che per ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ si possa trovare un numero $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'_0$ talmente piccolo che per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$ (λ_0 escl.), e per tutti gli indicati valori di x si abbia in valore assoluto $f_\lambda(x) - \psi(x) < \sigma$.

Allora, seguendo un processo di dimostrazione del tutto simile a quello seguito nel §. 14 si vede subito che prendendo ε'_0 sufficientemente piccolo, gli intervalli η_s che escludono i punti $i_1, i_2, i_3, \ldots, \alpha_0, \beta_0$ si potranno scegliere in modo che la somma degli integrali corrispondenti $\int_{\eta_s} \psi(x)dx$, e così quella degli altri $\int_{\eta_s} f_\lambda(x)dx$ per tutti i valori di λ da λ_0 a $\lambda_0+\varepsilon'_0$ siano minori di quella quantità che più ci piace σ_1; quindi evidentemente si può scrivere:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx = \sum \int_{\xi_s} f_\lambda(x)dx + \sigma',$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx = \sum \int_{\xi_s} \psi(x)dx + \sigma'',$$

vallo, e quindi, se si suppone p. es. $\alpha_0 < \beta_0$, nell'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ non comparirà l'integrale $\int_{\alpha_0-\delta}^{\alpha_0+\delta}$ esteso a tutto l'intervallo indicato, ma soltanto quello esteso alla porzione compresa fra α e $\alpha_0+\delta$. Lo stesso poi avverrà pel punto β_0. — Invece, pei punti $i_1, i_2, \ldots$ interni all'intervallo (α, β), nell'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ compariranno gl'integrali estesi agli intieri intervalli che servono ad escluderli.

essendo σ' e σ'' quantità che per tutti i valori di λ che si considerano fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon'_0$, si mantengono sempre numericamente inferiori a σ_1, e gli integrali $\int_{\xi_s}$ in ambedue queste formole essendo estesi agli intervalli non esclusi ξ_s.

Ma da queste formole si ha:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx = \sum \int_{\xi_s} \{ f_\lambda(x) - \psi(x) \} dx + \sigma' - \sigma'',$$

e per le ipotesi fatte si può trovare un numero $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'_0$ tale che per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$ e per *tutti i valori di x* durante l'integrazione, negli integrali $\int_{\xi_s}$ si abbia in valore assoluto $f(x)-\psi(x)<\sigma$; quindi si avrà evidentemente, pure in valore assoluto:

$$\sum \int_{\xi_s} \{ f_\lambda(x) - \psi(x) \} dx < \sigma(\beta_0 - \alpha_0),$$

e perciò sarà:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx;$$

talchè si può ora affermare che quando sono soddisfatte le condizioni poste sopra rispetto a $f_\lambda(x)$ e al suo limite $\psi(x)$ e rispetto agli integrali $\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx$, $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx$, e i limiti α_0 e β_0 di α e β sono finiti, il limite dell'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx$ esiste sempre e si determina passando al limite sotto il segno integrale e nei limiti dell'integrale medesimo.

287. È anche da osservare che, quando non si sappia nulla rispetto all'integrabilità di $\psi(x)$ fra α e β e agli integrali $\int_{\eta_s}^{\beta_0} \psi(x)dx$,

ma però siano soddisfatte tutte le altre condizioni poste sopra, si potrà ancora affermare che il limite dell'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ è una quantità determinata e finita L.

È chiaro infatti che se μ e ν sono due valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$, essendo ε_0 una quantità sufficientemente piccola, e se α', β', e α'', β'' sono i sistemi di valori corrispondenti di α e β, si avrà:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_\mu(x)dx = \sum \int_{\xi_s} f_\mu(x)dx + \sum \int_{\eta_s} f_\mu(x)dx,$$

$$\int_{\alpha''}^{\beta''} f_\nu(x)dx = \sum \int_{\xi_s} f_\nu(x)dx + \sum \int_{\eta_s} f_\nu(x)dx,$$

e quindi anche:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_\mu(x)dx - \int_{\alpha''}^{\beta''} f_\nu(x)dx = \sum \int_{\xi_s} \{f_\mu(x)dx - f_\nu(x)\} dx + \sigma' - \sigma'_1,$$

essendo σ' e σ'_1 quantità il cui valore assoluto può supporsi minore della quantità che più ci piace dipendentemente dalla piccolezza di ε_0 e degli intervalli η_s; quindi, poichè per le ipotesi fatte su $f_\lambda(x)$ quando ε_0 sia sufficientemente piccolo, per tutti i valori di x che cadono negli intervalli ξ_s e per tutti i valori μ e ν di λ fra λ_0 e $\lambda_0 + \varepsilon_0$ (λ_0 escluso) si ha in valore assoluto $f_\mu(x) - f_\nu(x) < 2\sigma$, ove σ è un numero scelto a piacere arbitrariamente piccolo, si conclude che prendendo ε_0 sufficientemente piccolo, per tutti i valori μ e ν di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$, le differenze $\int_{\alpha'}^{\beta'} f_\mu(x)dx - \int_{\alpha''}^{\beta''} f_\nu(x)dx$ sono numericamente minori di quella quantità che più ci piace σ'', e questo basta (§. 18) per poter dire che l'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ ha un limite determinato e finito L.

È inoltre da notare che, trattandosi degli intervalli η_s che escludono i punti singolari $i_1, i_2, \ldots$, invece della ipotesi che ab-

biamo ammessa che gli integrali $\int_{\eta_s} f_\lambda(x)dx$ a partire da un certo valore di λ in poi siano tutti di quel grado di piccolezza che più ci piace, basta evidentemente far l'altra che ciò accada per gli integrali $\int_{\eta_s} \{f_\mu(x) - f_\nu(x)\} dx$ per tutti i sistemi di valori μ e ν che può avere λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$, ove ε_0 è il solito numero sufficientemente piccolo; come si può altresì notare che il limite L di cui abbiamo mostrato l'esistenza sotto le condizioni indicate, per quanto si disse nel paragrafo precedente, sarà appunto l'integrale dei limiti $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx$, quando questo integrale sia esso pure determinato e finito.

288. Aggiungerò che quando i limiti α e β sono costanti e uguali in conseguenza a α_0 e β_0, e fra α_0 e β_0 (α_0 e β_0 inclus.) non esistono punti singolari i_1, i_2, ... di $f_\lambda(x)$ o di $\psi(x)$, la convergenza in ugual grado di $f_\lambda(x)$ verso il suo limite $\psi(x)$ per tutti i valori di x fra α_0 e β_0 (α_0 e β_0 inclus.), e la integrabilità di $f_\lambda(x)$ per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$ portano di necessità che l'integrale $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx$ sia determinato e finito, e sia in conseguenza il limite dell'integrale $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_\lambda(x)dx$ per $\lambda=\lambda_0$.

Si osservi infatti che prendendo ε_0 sufficientemente piccolo, per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$ e per tutti i valori di x fra α_0 e β_0 (α_0 e β_0 inclus.) si ha:

$$\psi(x) = f_\lambda(x) + \sigma',$$

essendo σ' numericamente minore di un numero positivo arbitrariamente piccolo σ; si vedrà subito da ciò che scomponendo l'intervallo (α, β) negli intervalli parziali δ_1, δ_2, ..., δ_n e indicando con $D_{\lambda,s}$ e D_s le oscillazioni di $f_\lambda(x)$ e di $\psi(x)$ nell'intervallo δ_s si avrà:

$$D_s < D_{\lambda,s} + 2\sigma,$$

e perciò sarà anche:

$$\sum_1^n \delta_s D_s < \sum_1^n \delta_s D_{\lambda,s} + 2\sigma(\beta-\alpha),$$

donde si vede appunto che quando α e β sono costanti e uguali a α_0 e β_0, la convergenza in ugual grado di $f_\lambda(x)$ verso il suo limite $\psi(x)$ e la integrabilità di $f_\lambda(x)$ fra α e β o α_0 e β_0 portano necessariamente anche la integrabilità di $\psi(x)$, e si ha perciò:

$$\lim \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_\lambda(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx.$$

289. Similmente, ammettendo ora di nuovo che α e β possano variare con λ, ma in modo sempre che siano determinati e finiti i loro limiti α_0 e β_0, e ammettendo anche che fra α_0 e β_0 vi siano i punti singolari $i_1, i_2, \ldots$ che costituiscano però al solito soltanto un gruppo finito o infinito di prima specie, si può osservare che se per ogni numero σ si potranno trovare successivamente col processo del §. 14 degli intervalli η_s che escludano questi punti e i punti estremi α_0 e β_0, e siano tali che *anche al successivo loro impiccolirsi* esista sempre un numero ε corrispondente (variabile o nò coll'impiccolire degli intervalli η_s) dotato della proprietà che per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$ gli integrali $\int_{\eta_s} f_\lambda(x)dx$ corrispondenti agli intervalli stessi η_s siano numericamente inferiori a quel numero che più ci piace σ, allora l'integrabilità di $f_\lambda(x)$ fra α e β e la sua convergenza in ugual grado verso il suo limite $\psi(x)$ in tutti gli intervalli restanti ξ_s, porteranno di necessità che la funzione $\psi(x)$ sia atta alla integrazione anche fra α_0 e β_0, e che si abbia quindi:

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx.$$

Indicando infatti con L il limite di $\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx$, che per quanto

si disse al §. 287 esisterà certamente, per λ compreso fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$, quando ε sia sufficientemente piccolo, avremo:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx = L+\sigma' = \sum\int_{\xi_s} f_\lambda(x)dx + \sum\int_{\eta_s} f_\lambda(x)dx,$$

essendo σ' e $\sum\int_{\eta_s} f_\lambda(x)dx$ arbitrariamente piccoli; e poichè, supponendo dapprima che i punti $i_1, i_2, \ldots$ siano in numero finito, gli intervalli ξ_s non vengono a comprendere punti singolari, e per quanto si è dimostrato nel paragrafo precedente si ha:

$$\sum\int_{\xi_s} f_\lambda(x)dx = \sum\int_{\xi_s} \psi(x)dx + \sigma'',$$

essendo σ'' un nuovo numero arbitrariamente piccolo, si vede di quì che sarà:

$$L - \sum\int_{\xi_s} \psi(x)dx = \sigma_1,$$

con σ_1 pure arbitrariamente piccolo; talchè, osservando ora che, impiccolendo tutt'al più corrispondentemente il numero ε, gli intervalli η_s possono supporsi piccoli quanto si vuole senza che σ_1 cessi di essere di quel grado di piccolezza che più ci piace, per la definizione dell'integrale $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx$, si avrà subito:

$$L = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx,$$

e questo dimostra appunto ciò che abbiamo enunciato pel caso che i punti $i_1, i_2, \ldots$ siano in numero finito.

Col solito metodo poi questo risultato si estende anche al caso in cui i punti singolari $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ costituiscono un gruppo infinito qualunque di prima specie.

290. E così dietro quanto abbiamo osservato si può evidentemente affermare che, invece di quelle condizioni che abbiamo poste nel §. 286 per essere sicuri che l'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ ha un limite

determinato e finito e che questo limite è l'integrale $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi_\lambda(x)dx$, basta porre per $f_\lambda(x)$ le condizioni indicate nel paragrafo precedente; e se l'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ avrà un limite determinato e finito L, ma questo non sarà l'integrale dei valori limiti $\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x)dx$, sia perchè questo integrale non è determinato e finito, sia perchè è differente da L, allora dovranno mancare alcune delle condizioni stesse, come p. es. dovranno esservi infiniti punti singolari fra α_0 e β_0 che costituiscano un gruppo di seconda specie, o dovrà mancare la convergenza in ugual grado di $f_\lambda(x)$ verso $\psi(x)$ negli intervalli ξ_s, o rispetto agli intervalli η_s non si potranno soddisfare le condizioni indicate nel paragrafo precedente.

291. Passiamo ora a considerare il caso in cui uno almeno dei due limiti α e β dell'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ è infinito o ha per limite l'infinito per $\lambda=\lambda_0$ a destra o a sinistra, p. es. a destra.

Supponiamo perciò per semplicità che β soltanto sia infinito o abbia per limite l'infinito, e α invece sia finito insieme al suo limite α_0; e in questa ipotesi ammettiamo che fra α e ogni numero fisso e finito ma arbitrariamente grande β_1 siano soddisfatte le condizioni precedenti per le quali si ha:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_\alpha^{\beta_1} f_\lambda(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)dx,$$

e ammettiamo anche che l'integrale $\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx$ sia determinato e finito e che col tendere di λ a λ_0 l'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$, per quanto β sia già infinito o cresca indefinitamente, abbia sempre un valore determinato e finito, e per ogni valore di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$, ove ε_0 è determinato e sufficientemente piccolo, *converga in ugual grado*

verso il suo valore, per modo cioè che per il valore scelto di ε_0 e per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ sia possibile trovare un numero γ tale che per ogni valore di β' compreso fra γ e β e per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$ (λ_0 escl.), si abbia in valore assoluto $\int_{\beta'}^{\beta} f_\lambda(x)dx < \sigma$.

Allora, siccome si ha:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx - \int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta_1} f_\lambda(x)dx - \int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)dx + \int_{\beta_1}^{\beta} f_\lambda(x)dx - \int_{\beta_1}^{\infty} \psi(x)dx,$$

se si osserva che β_1 può prendersi superiore a γ, e così grande che si abbia anche $\int_{\beta_1}^{\infty} \psi(x)dx < \sigma_1$, essendo σ_1 arbitrariamente piccolo, e i due primi integrali del secondo membro possono supporsi differenti l'uno dall'altro tanto poco quanto si vuole, si conclude che sotto le ipotesi fatte si ha la formola seguente:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx,$$

che è quella che generalizza la proprietà data nel §. 286 pel caso che α e β fossero finiti tanto essi che i loro limiti.

292. Faremo notare che per la dimostrazione di questa formola non importa propriamente supporre che l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f_\lambda(x)dx$ converga in ugual grado per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$, ma basta evidentemente supporre che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esista un numero *speciale* β_1 maggiore di un numero sufficientemente grande (quello cioè a partir dal quale si ha $\int_{\beta_1}^{\infty} \psi(x)dx < \sigma_1$) pel quale si possa trovare un corrispondente numero ε dotato della proprietà che per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$ si abbia in valore assoluto $\int_{\beta_1}^{\beta} f_\lambda(x)dx < \sigma$.

Quando poi non si sappia nulla intorno alla integrabilità di $\psi(x)$ fra α e ∞, ma del resto siano soddisfatte tutte le altre condizioni poste nel numero precedente, e sia pure soddisfatta quella relativa alla convergenza in ugual grado di $f_\lambda(x)$ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$, o quella della esistenza per ogni numero σ di un numero *speciale* β_1 pel quale fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$, quando ε è sufficientemente piccolo, si ha in valore assoluto $\int_{\beta_1}^{\beta} f(x)dx < \sigma$, allora si potrà ancora affermare che l'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ ha un limite determinato e finito per $\lambda=\lambda_0$ a destra, ma non si potrà dire però che questo limite sia appunto l'integrale $\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx$ pel quale invece, come abbiamo detto, si è incerti anche sulla sua esistenza.

È chiaro infatti che se μ e ν sono due valori qualunque di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$, e ε è sufficientemente piccolo, e se α', β', e α'', β'' sono i valori corrispondenti di α e β, e β_1 è il numero ora indicato, sarà:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f_\mu(x)dx - \int_{\alpha''}^{\beta''} f_\nu(x)dx = \int_{\alpha'}^{\beta_1} f_\mu(x)dx - \int_{\alpha''}^{\beta_1} f_\nu(x)dx + \int_{\beta_1}^{\beta'} f_\mu(x)dx - \int_{\beta_1}^{\beta''} f_\nu(x)dx;$$

e siccome i due ultimi integrali del secondo membro per le ipotesi fatte sono arbitrariamente piccoli, e i due primi quando ε è abbastanza piccolo differiscono ambedue tanto poco quanto si vuole da $\int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)dx$, pel teorema del §. 18 si può concludere appunto che l'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ ha un limite determinato e finito L per $\lambda=\lambda_0$; ma non risulta di quì che l'integrale $\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx$ debba essere determinato e finito e che quindi debba essere appunto il limite L di $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$.

293. Però se la convergenza dell'integrale $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon_0$ quando ε_0 è sufficientemente piccolo sarà convergenza in ugual grado, o, anche più generalmente, se per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esisterà un numero γ tale che per *ogni* valore di β_1 maggiore di γ si possa trovare un numero ε dotato della proprietà che per λ compreso fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$, quando β sia divenuto già maggiore di β_1, si abbia sempre in valore assoluto $\int_{\beta_1}^\beta f_\lambda(x)dx < \sigma$, allora, quando restino ferme le altre ipotesi precedenti, è facile vedere che l'integrale $\int_{\alpha_0}^\infty \psi(x)dx$ avrà il valore determinato e finito L.

Si osservi infatti che in questo caso per $\beta_1>\gamma$ dalla formola:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx = \int_\alpha^{\beta_1} f_\lambda(x)dx + \int_{\beta_1}^\beta f_\lambda(x)dx,$$

si ha:

$$\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx = \int_\alpha^{\beta_1} f_\lambda(x)dx + h\sigma,$$

con h numericamente inferiore ad uno; e poichè possiamo supporre ε tanto piccolo che per tutti i valori di λ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$ gli integrali $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x)dx$, $\int_\alpha^{\beta_1} f_\lambda(x)dx$ differiscano dai loro limiti respettivi L e $\int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)dx$ meno di un numero positivo arbitrariamente piccolo σ_1, si avrà:

$$\mathrm{L} - \int_{\alpha_0}^{\beta_1} \psi(x)dx = 2h'\sigma_1 + h\sigma,$$

con h' numericamente minore di uno per tutti i valori di β_1 superiori a γ; e questo dimostra evidentemente che l'integrale $\int_{\alpha_0}^\infty \psi(x)dx$ è determinato e finito e il suo valore è L.

Questo poi ci permette evidentemente di dire che quan sono soddisfatte le condizioni del paragrafo precedente per le quali l'integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)dx$ ha un limite determinato e finito L, ma questo limite non è l'integrale $\int_{\alpha_0}^{\infty} \psi(x)dx$ perchè questo integrale è infinito o indeterminato, bisognerà necessariamente che le condizioni poste sopra rispetto alla convergenza in ugual grado dell' integrale $\int_{\alpha}^{\beta} f_{\lambda}(x)dx$ fra λ_0 e $\lambda_0+\varepsilon$, o rispetto agli integrali $\int_{\beta_1}^{\beta} f_{\lambda}(x)dx$ pei quali $\beta_1>\gamma$, non siano tutte soddisfatte.

Questi risultati possono anche servire a trovare i casi nei quali i noti teoremi della derivazione o integrazione sotto il segno integrale sono rigorosamente applicabili.

FINE

INDICE

DELLE

MATERIE CONTENUTE IN QUESTO LIBRO